

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM VIII · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1959

SPIS TREŚCI

J. L. Jakubowski: W sprawie definicji pojemności cząstkowych	3
B. Konorski: W sprawie pojęcia pojemności cząstkowej	15
T. Cholewicki: Wyrażenie analityczne konfiguracji obwodu elektrycznego	39
P. Ciechanowicz: Nowy sposób obliczania napięć cewkowych oparty na falowym przedstawieniu drgań potencjałów wewnątrz uzwojenia transformatora z uwzględnieniem fal odbitych	63
P. Ciechanowicz: Interpretacja graficzno-fizyczna przebiegu napięć cewkowych	81
P. Ciechanowicz: Zakres stosowania teorii falowej przy obliczaniu napięć cewkowych w uzwojeniach transformatorów	89
P. Szulkin: Graficzna metoda obliczania współczynników odbicia od ziemi	97
P. Szulkin: Propagacja fal elektromagnetycznych w ograniczonym ośrodku przewodzącym	103
J. Lenkowski: Analiza detektora diodowego jako układu parametrycznego	123
J. Bader: Eksperymentalne badania oporności połukowej iskierników o małych odstępach	133
K. Leibler: Właściwości dielektryczne układów rozproszonych dielektryk-przewodnik. Część II	157
B. Mroziewicz: Technologia przejść stopowych $p-n$ z punktu widzenia ich kształtu	169
E. Kuźma: Pomiar stałej czasu termistora	201
Komunikaty:	
A. Smoliński i Z. Kaczkowski: Wpływ naprężeń na przenikalność stali krzemowych	211

СОДЕРЖАНИЕ

Я. Л. Якубовски: По вопросу определения частичных ёмкостей	3
В. Конорски: О определении частичной ёмкости	15
Т. Холевский: Аналитическое выражение конфигурации электрической цепи	39
П. Цеханович: Новый метод расчёта катушечных напряжений в последовательных процессах трансформатора, основанный на волновом представлении колебаний потенциалов внутри трансформаторной обмотки с учетом отраженных волн	63
П. Цеханович: Графически-физическая интерпретация кривой катушечного напряжения	81
П. Цеханович: Область применения волновой теории при вычислении катушечных напряжений в трансформаторных обмотках	89
П. Шулькин: Графический метод расчёта коэффициентов отражения от почвы	97
П. Шулькин: Распространение электромагнитных волн в ограниченной проводящей среде	103
И. Ленковский: Анализ диодного детектора как параметрической системы	123
И. Бадер: Опытное исследование последовательного сопротивления малых искровых промежутков	133
К. Лейблер: Диэлектрические свойства дисперсных систем „диэлектрик-проводник“	157
Б. Мрозович: Технология $p-n$ переходов сплавов с точки зрения их формы	169
Е. Кузьма: Измерение постоянной времени термистора	201
Сообщения:	
А. Смолински и З. Качковски: Влияние механических напряжений на магнитную проницаемость кремнистых сталей	211

CONTENTS — SOMMAIRE

J. L. Jakubowski: About definition of partial capacitances	3
B. Konorski: Conception of partial capacitance	15
T. Cholewicki: Analytical determination of the configuration of an electric circuit	39
P. Ciechanowicz: New calculation method of coil voltages based upon wave representation of oscillations of potentials inside transformer windings taking into account the reflected waves	63
P. Ciechanowicz: Graphical interpretation of coil voltage curve	81
P. Ciechanowicz: Range of application of wave theory in calculation of coil voltages in transformer windings	89
P. Szulkin: Graphical method of calculating the from earth's surface reflection coefficient	97
P. Szulkin: Propagation of electromagnetic waves in a semi-infinite conducting medium	1
J. Lenkowski: Analysis of diode detector as of a variable parameter circuit	123
J. Bader: Experimental investigations on electric recovery strength of spark gaps with small spacings	133
L. Leibler: Dielectric properties of dispersed dielectric-conductor systems	157
B. Mroziewicz: Technology of $p-n$ alloy junction from standpoint of their shape	169
E. Kuźma: Measurement of thermistor thermal time constant	201
Communiqués:	
A. Smoliński, Z. Kaczkowski: Stress influence on permeability of silicon steels	211

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM VIII • ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1959

R A D A R E D A K C Y J N A

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. IGNACY MAŁECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. STANISŁAW SZPOR,
PROF. PAWEŁ SZULKIN

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

Redaktor Naczelny

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

Z-ca Redaktora Naczelnego

PROF. PAWEŁ NOWACKI

Sekretarz

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

PRINTED IN POLAND

COPYRIGHT BY
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1952

ADRES REDAKCJI

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,
Zakład Radiotechniki, tel. 8.32.04 lub 8.87.40
Redakcja czynna: poniedziałki, środy i piątki

Państwowe Wydawnictwo Naukowe - Dział Czasopism
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 775 + 125 egz.	Do składania 7 II 1959
Ark. wyd. 13,75, druk. 13,38	Podpisano do druku 22 VI 1959
Papier druk. sat. 70 g IV kl. 70 × 100/16	Druk ukończ. w czerwcu 1959
Cena zł 30,—	F-10 - Zamówienie 121/129

POZNAŃSKA Drukarnia Naukowa — POZNAŃ, FREDRY 10

621.3.011.4:537.71(083.7)

J. L. JAKUBOWSKI

W sprawie definicji pojemności cząstkowych

Rękopis dostarczono 19. 11. 1958

Artykuł poddaje analizie pojęcie pojemności cząstkowych wprowadzonych przez B. Konorskiego i dochodzi do wniosku, że nie są to pojemności stanowiące współczynniki równań Maxwella, ale współczynniki określające stosunki ładunków w polu wypadkowym, wytworzonym przez jednocześnie umieszczenie ładunków na kilku elektrodach, do odpowiednich różnic potencjałów. Autor proponuje nazwać te współczynniki pojemnościami cząstkowymi pola wypadkowego.

1. WPROWADZENIE

Pojęcie pojemności cząstkowych jest szeroko stosowane w energo- i teleelektryce i wydawałoby się, że związane z nim zagadnienia są całkowicie wyczerpane przez teoretyków. Że tak nie jest świadczą artykuły B. Konorskiego [5] do [11]. W artykułach tych znajdujemy między innymi następujący pogląd ([8], s. 385).

„Aus den Formeln ist ersichtlich, dass die Teilkapazitäten nicht nur von den geometrischen Massen des Systems und von der Dielektrizitätskonstante des Mediums abhängen, sondern auch von den Potentialen und Ladungen beider Kugeln”.

Pogląd ten jest niezgodny z utartym poglądem na pojemności cząstkowe, według którego ich wartość zależy tylko od parametrów geometrycznych układu i od stałej dielektrycznej środowiska. Po przestudiowaniu prac Konorskiego i po szeregu dyskusji z ich autorem doszedłem do wniosku, że podstawą rozbieżności między ogólnie przyjętymi sformułowaniami i zapatrywaniem Konorskiego są różnice w poglądach na istotę pojemności cząstkowych, a więc różnice natury definicyjnej. Różnice te postaram się wyjaśnić poniżej; mam nadzieję, że ułatwi to wielu czytelnikom studiowanie prac Konorskiego, stanowiących wnikliwą analizę stosunków, panujących w polach elektrostatycznych.

2. RÓWNANIA MAXWELLA DLA POLA ELEKTROSTATYCZNEGO

Równania Konorskiego dotyczą układu 2 kul ekscentrycznych, wniośki jednak mają charakter ogólny. W poniższej analizie przyjmujemy tę

ściwie tylko inną, trzecią postać układu równań Maxwella. Przekonać się można o tym porównując współczynniki w obu równaniach, np: dla q_1 :

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + c_{10}V_0, \\ q_1 &= (C_{12} + C_{10})V_1 - C_{12}V_2 - C_{10}V_0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wynika stąd

$$c_{11} = C_{12} + C_{10}; \quad c_{12} = -C_{12}, \quad c_{10} = -C_{10}$$

oraz ²

$$C_{10} = c_{11} + c_{12}. \quad (7)$$

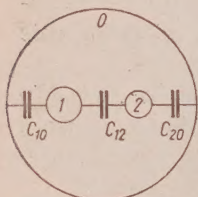
Zakładając $V_0 = 0$ otrzymujemy najbardziej rozpowszechnioną postać równań:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_{12}(V_1 - V_2) + C_{10}V_1, \\ q_2 &= C_{21}(V_2 - V_1) + C_{20}V_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

W literaturze pojemności cząstkowe noszą nazwy: C_{10}, C_{20} — pojemności cząstkowych własnych, C_{12} — pojemności cząstkowej wzajemnej.

Uwzględniając ostatnie wyprowadzenie, widzimy oczywiście, że współczynniki C_{kl} — pojemności cząstkowe — są zależne tylko od parametrów geometrycznych oraz od ϵ . Ułatwia to w zagadnieniach praktycznych obliczenia i stanowi usprawiedliwienie wprowadzenia zarówno współczynników c_{kl} jak i C_{kl} .

W ostatnich równaniach pojemności cząstkowe C_{kl} były traktowane jako stałe współczynniki proporcjonalności. Budowa wzorów pozwala interpretować je fizycznie; odpowiadają one pojemnościom według rys. 2. Interpretację taką uzasadnia szczegółowo G. A. Campbell [2], który nazywa pojemność cząstkową — direct capacity.



Rys. 2. Pojemności cząstkowe układu 2 kul wg Campbella.

4. TERMINOLOGIA

Podana wyżej terminologia, rozróżniająca
współczynniki potencjalne,
współczynniki pojemnościowe własne i wzajemne,
pojemności cząstkowe własne i wzajemne
jest logiczna i w zasadzie ogólnie przyjęta w literaturze współczesnej.

² Konsekwencją tych zależności jest oczywiście $c_{11} + c_{12} + c_{10} = 0$. Jest to warunek zrozumiały. Jeśli wszystkim elektrodom naszego układu dać ten sam potencjał V to ładunki elektrod będą równe 0:

$$q_1 = (c_{11} + c_{12} + c_{10})V = 0.$$

Przy potencjale V nie równym 0 jest to spełnione dla $c_{11} + c_{12} + c_{10} = 0$.

Twórca tych pojęć James Clerk Maxwell ([13], wyd. 3, t. I, s. 108 i nast.) nazywał

współczynniki potencjalne — *coefficients of potential*,
współczynniki pojemnościowe — *capacity of a conductor*,
— *coefficients of induction*.

Przez *capacity of a conductor* Maxwell rozumiał współczynnik pojemnościowy własny, czyli z dwoma jednakowymi indeksami, a więc c_{11} , c_{22} ..., a przez *coefficients of induction* — współczynniki pojemnościowe wzajemne o indeksach różnych, a więc c_{12} , c_{23} itd.

Autorzy współcześni posługują się zwykle nomenklaturą Maxwella, chociaż często nieco zmienioną. Tak więc W. R. Smythe ([14], s. 37) mówi o *coefficients of potential*, *coefficients of capacitance* i *coefficients of induction*. W rosyjskim tłumaczeniu nowego wydania Smytha ([15], s. 47) mamy rozszerzenie terminologii: c_{11} , c_{22} ... nazwane jest *sobstwiennym jomkostnym koefficientom* lub *sobstwiennoj jomkostiu*, c_{12} , c_{23} ... — *jomkostnym koefficientom*, *koefficientom indukcji* lub *wzaimnoj jomkostju*. S. Szpor natomiast w „Ochronie odgromowej” (t. I, s. 25), pojemnością własną i wzajemną nazywa odwrotności odpowiednich współczynników potencjalnych.

Stosowane chętnie przez elektrotechników, a określone wyżej pojemności cząstkowe własne i wzajemne (Teilkapazitäten) mogą mylić się ze współczynnikami pojemności własnej i wzajemnej, zwłaszcza gdy są oznaczone symbolami z dwoma jednakowymi indeksami, np. C_{11} (por. [1], s. 185). Dlatego autor niniejszego artykułu przyjął oznaczenia C_{10} i C_{20} , a nie jak B. Konorski C_{11} i C_{22} .

Nowych elementów do terminologii nie wnosi również normalizacja międzynarodowa. Międzynarodowy Słownik Elektrotechniczny [3] podaje tylko jako pojęcie 05 — 15 — 175: *Capacitance of a conductor (in the presence of other conductors)* i jego definicję: *the charge of a conductor divided by its potential, all other conductors assumed to be at zero potential*. Jest to definicja współczynnika pojemnościowego własnego ściśle według Maxwella³.

Różnice w obecnie stosowanej terminologii nie tłumaczą, jak widać, sformułowania Konorskiego, podanego na początku artykułu, według którego wartości pojemności cząstkowych są zależne od potencjałów i ładunków. Wszystkie dotychczas omawiane współczynniki — bez względu na terminologię — są stałe w danych warunkach geometrycznych. Jest

³ Przy sposobności warto zaznaczyć, że polski odpowiednik tego terminu, podany w Vocabulaire jest błędny. Pojemność tę nazwano mianowicie *pojemnością wzajemną dwóch przewodów*. Niewłaściwy jest również termin niemiecki *Teilkapazität*.

więc pewne, że Konorski stosuje jeszcze inną, nową definicję pojemności. Aby przeanalizować tę sprawę, wrócimy do układu 2 kul i zajmiemy się superpozycją pól.

5. SUPERPOZYCJA PÓL W UKŁADZIE 2 KUL

Ponieważ zależności między potencjałami i ładunkami w układach elektrostatycznych są liniowe, słuszną jest zasada superpozycji pól elek-

trycznych, wywołanych przez różne ładunki na elektrodach. Zasadę tę stosuje w swych pracach Konorski, przy czym zakłada, że a) najpierw jedna z kul ma potencjał V większy od 0, a inne kule mają potencjały 0, po czym druga kula ma potencjał minus V' ($V' > 0$), a reszta elektrod potencjał zero (rys. 3a i b). Dla tego przypadku Konorski uznaje słuszość stosowania pojemności cząstkowych i równań Maxwella:

pole składowe a

$$q_{1a} = C_{12}(V - 0) + C_{20}(V - 0), \quad (9)$$

pole składowe b

$$q_{2b} = C_{12}(0 + V') + C_{20}(0 - 0), \quad (10)$$

Rys. 3. a) Układ 2 kul przy potencjale kuli 1. równym 0, b) Układ 2 kul przy potencjale kuli 2. równym 0.

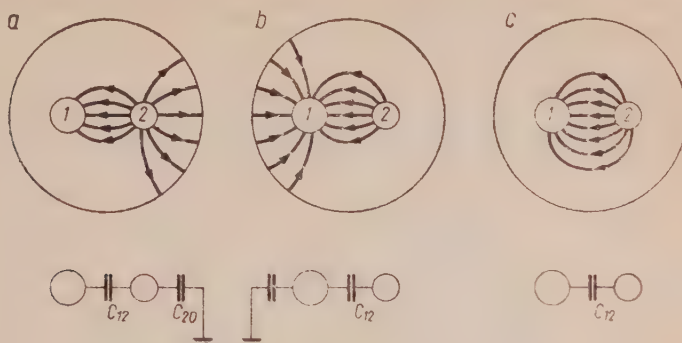
pole wypadkowe po superpozycji

$$q_2 = C_{12}(V + V') + C_{20}V. \quad (11)$$

W równaniach powyższych i na rys. 3 występują zdefiniowane poprzednio pojemności cząstkowe, niezależne od ładunków i napięć. Do tego punktu rozważania Konorskiego są zgodne z naszymi. Konorski przy tym uznaje fizyczną realność pojemności cząstkowych w układzie, w którym tylko jedna z kul ma potencjał różny od 0.

W dalszych swych rozważaniach Konorski sięga jednak do obrazu wypadkowego pola, wynikającego z superpozycji pól składowych z rys. 3. W zależności od względnej wartości potencjałów kul 1 i 2 obraz wypadkowy kształtuje się, według Konorskiego, jak na rys. 4 a, c, to znaczy linie pola przebiegają do nieskończoności tylko z jednej kuli⁴. Nie ma

więc linii łączących drugą kulę z nieskończonością. Na podstawie tego spostrzeżenia Konorski twierdzi ([5], s. 98), że np. dla układu z rys. 4b



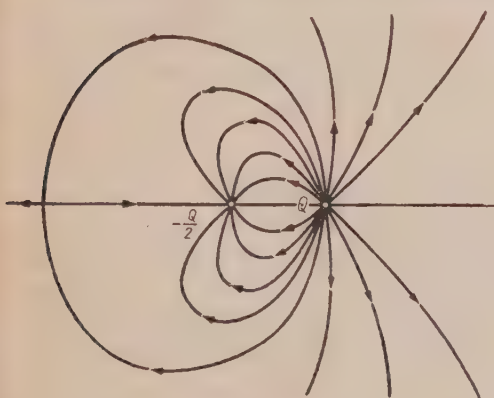
Rys. 4. Obrazy wypadkowe pól według Konorskiego, wynikające z superpozycji pól składowych, jak na rys. 3.

„czynne są pojemność cząstkowa C_{12} (pojemność wzajemna) i C_{11} ⁵ (pojemność własna)” — a druga pojemność własna — C_{22} (w mojej transkrypcji C_{20}) jest nieczynna, a więc fizycznie nie istnieje (nie ma linii pola — nie ma pojemności).

Zgodnie z powyższym sformułowaniem Konorski układa równania na ładunki z pominięciem jednej pojemności cząstkowej C_{10} lub C_{20} , a więc np. przy $C_{20}=0$ równania

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_{12}(V_1 - V_2) + C_{10}V_1, \\ q_2 &= C_{21}(V_2 - V_1). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Jest jasne, że nie jest to związany bezpośrednio z prawem Coulomba układ równań Maxwella, lecz nowy układ równań, który wiąże z sobą ładunki i potencjały wypadkowego obrazu pola. W związku z tym ozna-



Rys. 5. Obraz pola dwóch ładunków punktowych o znakach przeciwnych wg Duranda.

⁴ Dowód słuszności takiego przebiegu podany przez Konorskiego w [10] nie jest pełny; należałoby go uzupełnić dowodem, że do kuli o ładunku bezwzględnie mniejszym nie dochodzą linie pola z nieskończoności. Dla ładunków punktowych zjawisko jest znane, o czym świadczy rys. 5 (wg E. Duranda, [4], rys. 33).

⁵ W mojej transkrypcji C_{10} — przyp. autora.

czenie współczynników C_{12} , C_{10} , C_{20} powinno być inne, np. K_{12} , K_{10} , K_{20} — gdyż nie są to współczynniki Maxwella. Przyjmując te nowe oznaczenia, możemy określić zależności współczynników K_{12} , K_{10} , K_{20} od C_{12} , C_{10} i C_{20} . Mianowicie

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= K_{12}(V_1 - V_2) + K_{10}V_1 = C_{12}(V_1 - V_2) + C_{10}V_1, \\ q_2 &= K_{12}(V_2 - V_1) \quad \quad \quad = C_{12}(V_2 - V_1) + C_{20}V_2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Stąd

$$\left. \begin{aligned} K_{10} &= C_{10} + C_{20} \frac{V_2}{V_1}, \\ K_{12} &= C_{12} + C_{20} \frac{V_2}{V_2 - V_1}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Jak wynika z ich definicji pojemności K , wprowadzone przez Konorskiego odnoszą się do obrazu pola wypadkowego wytworzonego przez jednocześnie umieszczone ładunki na kilku elektrodach; dlatego można by je nazwać pojemnościami cząstkowymi pola wypadkowego. Twierdzenie Konorskiego, podane na wstępie, staje się po tym uzupełnieniu całkowicie jasne. To samo dotyczy dalszego ciągu tego twierdzenia:

„Interessant ist überhaupt das Auftreten von je einer Eigenkapazität in jedem System von endlichen Ausmassen; das Vorhandensein einer solchen Teilkapazität liess sich allenfalls vermuten, obwohl dies normalerweise nicht empfunden wird”.

Stosowanie wzmiankowanej nazwy *pojemności cząstkowe pola wypadkowego* może prowadzić do nieporozumień u czytelników, przyzwyczajonych do terminologii odnoszącej się do układów liniowych. Według nowszych autorów układ liniowy oznacza to samo, co układ, do którego stosuje się zasada superpozycji, a pojemności układu liniowego to pojemności stałe, niezależne od napięcia. Dlatego też lepiej byłoby mówić nie o *pojemnościach cząstkowych pola wypadkowego*, ale wprost o *pojemnościach pola wypadkowego*.

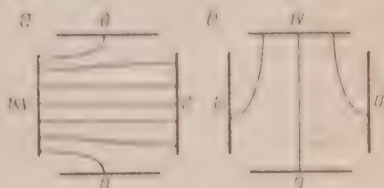
W każdym razie wyraźne rozróżnianie pojemności cząstkowych C_{11} , C_{22} , C_{12} i pojemności pola wypadkowego K_{11} , K_{22} , K_{12} jest konieczne. Bez tego rozróżnienia np. niektóre rozważania w artykułach Konorskiego ([10], wzory (13) do (21) oraz [11], wzory (60) do (68)) nie dają się logicznie przeprowadzić i zdają się prowadzić do niesłusznych wniosków, np. że $-c_{12} = K_{12}$.

6. POZORYNY PARADOKS ZNIKANIA POJEMNOŚCI CZĄSTKOWYCH W POLU WYPADKOWYM

Fakt, że w polu wypadkowym, powstającym przez nałożenie dwu pól składowych, mogą nie występować linie pola między elektrodami, mającymi pojemności cząstkowe (w sensie Maxwella) — jest znany w literaturze. Np. Kupfmüller ([12], s. 90, rys. 84) pokazuje układ 4 przewodów (rys. 6), w którym zjawisko to występuje. Bardziej naczynie ilustruje to szkicowy rys. 7. Składamy 2 pola: pole z rys. a i rys. b, których



Rys. 6. Obraz pola układu 4 przewodów równoległych wg Kupfmüllera.



Rys. 7. Dwa pola składowe po nałożeniu których nie występują linie pola między dwoma z elektrod, mimo że występowały w polu składowym.

natężenia różnią się o kilka rzędów wielkości. Jest jasne, że pole wypadkowe nie będzie miało linii pola, przebiegającego od górnej elektrody do dolnej, mimo że są one w polu składowym i że pojemność cząstkowa w sensie Maxwella między tymi elektrodami istnieje.

Fakt, że w obrazie jakiegoś pola nie istnieją linie, obrazujące pojemności cząstkowe (typu Maxwella), nie może nas odwieść od stosowania tych współczynników do obliczeń. Układ zastępczy, złożony z pojemności cząstkowych, dostosowany do równań Maxwella, nie jest układem doskonałym; powinno nam wystarczyć, że daje się dobrze interpretować fizycznie tylko w pewnych przypadkach.

Cechą decydującą o przydatności pojemności cząstkowych Maxwella jest właśnie ich stałość. Cechy tej nie posiadają pojemności cząstkowe pola wypadkowego, wprowadzone przez Konorskiego; tym niemniej analiza ich zmienności jest interesująca.

WYKAZ LITERATURY

1. Buchholz H.: *Elektrische und magnetische Potentialfelder*, 1957.
2. Campbell G.A.: *Direct capacity measurement*. The Bell System Techn. Journal, 1922, Nr 1, s. 18.
3. Commission Électrotechnique Internationale — Vocabulaire Electrotechnique International, 2 wyd., grupa 05. Définitions fondamentales, 1954.

4. Durand E.: *Électrotechnique et magnétostatique*, 1953.
5. Konorski B.: Nowe twierdzenia o polu elektrycznym. Arch. El. t. IV, z. 1, 1955.
6. Konorski B.: Kąty graniczne w polu elektrostatycznym dwóch kul o ładunkach różnych znaków. Arch. El., t. V, z. 2, 1956.
7. Konorski B.: Trzy parametry w polu elektrostatycznym dwóch jednakowych kul. Arch. El., t. V, z. 3, 1956.
8. Konorski B.: Verallgemeinerung des Coulombschen Grunggesetzes. Archiv f. Elektr., t. 42, z. 7, 1956.
9. Konorski B.: Kąty graniczne i parametry w polu elektrostatycznym dwóch kul o ładunkach jednoimiennych. Arch. El., t. VI, z. 3, 1957.
10. Konorski B.: O pewnym twierdzeniu z elektrostatyki i jego konsekwencjach. Arch. El., t. VI, z. 3, 1957.
11. Konorski B.: Gewisse Eigenschaften des elektrostatischen Feldes zweier Kugeln. Archiv f. Elektr., t. 43, z. 4, 1957.
12. Küpfmüller K.: *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*. wyd. 5, 1955.
13. Maxwell J.C.: *A treatise on electricity and magnetism*. 1 wyd. 1873, 3 wyd. 1904.
14. Smythe W.R.: *Static and dynamic electricity*, 1939.
15. Smythe W.R.: *Elektrostatika i elektrodynamika* (tłum. ros. z wyd. 1930), 1954.
16. Mejerowicz E.A., Riedkin W.K.: *Czasticznyje jomkosti...*, *Elektriczestwo*, 1958, z. 1.

ПО ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ЁМКОСТЕЙ

Резюме

Б. Конорски в своих работах [1] — [7] пришел к заключению, что частичные ёмкости 2 уединённых шаров являются функцией не только пространственных параметров, но также и потенциалов и зарядов электродов. Как это следует из анализа данного в статье, основанного на уравнениях Максвелла с постоянными коэффициентами, Конорски принял за основу другое определение частичных ёмкостей, чем Максвелл, а именно его ёмкости являются соотношением электродных зарядов к соответственным разностям потенциалов в результирующем поле, образованном одновременным помещением зарядов на нескольких электродах.

Такое поле (рис. 4) в системе 2 шаров с противоположными потенциалами в общем случае имеет исходящие в бесконечность линии только из одного электрода, и следовательно, по Конорскому ёмкость существует только между одним шаром и бесконечностью. Ёмкости определённые по зарядам и по разностям потенциалов результирующего поля, являются вообще говоря, функцией потенциалов и зарядов. Управляющие ими законы интересны с точки зрения соотношений в электростатическом поле, однако постоянные коэффициенты Максвелла пригоднее для практических вычислений.

ABOUT DEFINITION OF PARTIAL CAPACITANCES

Summary

B. Konorski in his works [1] to [7] came to the conclusion that the partial capacitances of the set consisting of two solitary spheres are functions not only of the space parameters but of the potentials and electrode charges as well.

As the analysis presented in this paper based on Maxwell equations (with constant coefficients) shows, B. Konorski used a different definition of the partial capacitances from that of Maxwell; namely his capacitances represent a ratio of the electrode charges and the corresponding potential differences in resultant field induced by the simultaneous deposition of charges upon several electrodes.

In the set of two spheres with adverse potentials such a field in general, contains the lines propagating into infinity from one electrode only; thus according to B. Konorski it exists the capacitance between only one sphere and the infinity.

The capacitances determined out of charges and potential differences of the resultant field are, in general, the functions of the potentials and charges.

The laws governing over them are interesting from the view-point of the structure of the electrostatic fields, but the constant Maxwell coefficients, however, are more useful in the practical evaluations.



621.3.011.4:537.71(083.7)

B. KONORSKI

W sprawie pojęcia pojemności cząstkowej¹

Rękopis dostarczono 21. 11. 1958

Pole dwóch kul: obrazy pól, schematy zastępcze, anomalie. Współczynniki potencjalne s_{ij} i pojemnościowe c_{ij} wprowadzone przez Maxwella. Pojemności cząstkowe C_{ij} i K_{ij} . Interpretacja fizyczna i matematyczna tych wielkości, ich przydatność, sprawy terminologiczne.

1. WPROWADZENIE

Z większością uwag przytoczonych w artykule prof. J. L. Jakubowskiego należy się zgodzić; wydaje się jednak pożądane naświetlić poruszone w artykule tematy również i z innego punktu widzenia.

Zgodnie z koncepcją autora niniejszej odpowiedzi punktem wyjściowym dla ustalenia definicji pojemności cząstkowej jest pole elektrostatyczne dwóch kul. Dlatego też na wstępie podano kilka wiadomości dotyczących tego pola.

Aby nie wprowadzać dodatkowych trudności stosowane będą poniżej w miarę możliwości te same oznaczenia, jakich używa prof. Jakubowski.

2. ANOMALIA + —

Weźmy 2 kule metalowe K i K' znajdujące się w 2 pomyślanych ∞ rozległych przestrzeniach. Oznacza to, że odległość D środków $0, 0'$, tych kul przyjmujemy jako nieskończenie wielką. Założmy, że promienie kul są r, r' , a ładunki — Q, q' . W tych warunkach potencjały V, V' kul wynoszą

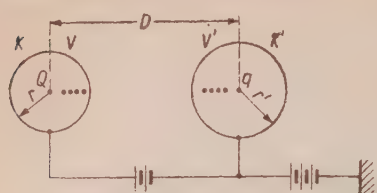
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad V' = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad (1)$$

tzn. zależą tylko od ładunków własnych; pola elektryczne obu kul na siebie nie wpływają.

Będziemy teraz kule K, K' zbliżali do siebie w taki sposób, aby potencjały ich utrzymywały wartości V, V' określone przez (1); możemy to

¹ Odpowiedź na artykuł prof. J. L. Jakubowskiego.

uczynić stosując schematyczne połączenie przedstawione na rys. 1. Na podstawie twierdzenia Lorda Kelvina otrzymane przy skończonej wartości $D=00'$ pole elektrostatyczne jest



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie dwóch kul o stałych potencjałach; ładunki główne i dwa ciągi ładunków dodatkowych.

równoważne polu utworzonemu przez punktowe ładunki Q, q' oraz przez 2 nieskończone ciągi malejących punktowych ładunków influencyjnych, położonych wewnątrz powierzchni K, K' (zakładamy teraz, że wewnątrz tych powierzchni znajduje się próżnia). Ładunki te dopłynęły do kul K, K' z baterii (rys. 1) lub też odpłynęły od K, K' do baterii. Oznaczając sumy ładunków influencyjnych wewnątrz K, K' przez Δ, Δ' znajdziemy, że łączne ładunki H, H' w tych obszarach kulistych wynoszą teraz

$$H=Q+\Delta; \quad H'=q'+\Delta'. \quad (2)$$

Nazywamy Q i q' w (2) ładunkami głównymi, a ładunki Δ, Δ' ładunkami dodatkowymi. Z cytowanego wyżej twierdzenia Lorda Kelvina wynika, że znak ładunku Δ jest przeciwny znakowi ładunku q' , a znak ładunku Δ' jest przeciwny znakowi ładunku Q . W celu skonkretyzowania rozważanego przypadku założmy, że

$$Q>0; \quad q'>0 \quad \text{ i } \quad Q<q'. \quad (3)$$

Na zasadzie powiedzianego wyżej wynika

$$\Delta<0; \quad \Delta'<0 \quad (4)$$

oraz

$$H<Q; \quad H'<q'.$$

W [1] i [4] okazano, że zachodzą zależności

$$H=QS-T'q'; \quad H'=q'S'-TQ, \quad (5)$$

gdzie S, T, S', T są funkcjami zmiennych r, r', D . Wartości tych funkcji dla rozmaitych wartości parametrów r/D i r'/D podane są w [7].

Jeżeli będziemy dalej kontynuowali proces zbliżania obu kul zapoczątkowany na początku tego rozdziału, to okaże się, że oba wyrazy QS i $T'q'$ lewego wzoru w (5) monotonicznie się zwiększają, jednakże wartość odjemnika $T'q'$ zwiększa się szybciej niż wartość odjemnej QS ; okazuje się dalej, że możliwe jest osiągnięcie w trakcie zmniejszania odległości D takiego stanu, że

$$QS=T'q', \quad (6)$$

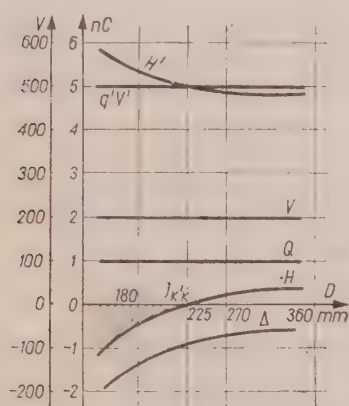
tj. że $H=0$. Ponieważ zatem wówczas łączny ładunek kuli K równa się

zeru, przeto relacja (6) dotyczy² stanu $J_{K'K}$ influencji elektrostatycznej kuli K' na nie naładowaną kulę K .

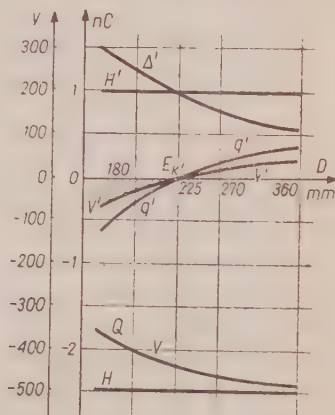
Co się stanie, gdy obie kule będziemy zbliżali do siebie jeszcze dalej? W lewym wzorze (5) wartość $T'q'$ stanie się wtedy większa niż QS i ładunek H z dodatniego przemieni się na ujemny. Ponieważ jednak ładunek główny Q kuli K zachowa zgodnie z założeniami niezmienną wartość (1) i pozostanie dodatni, jak to przyjęliśmy wyżej, przeto po przekroczeniu $J_{K'K}$ osiągniemy stan, w którym kula K uzyska ładunek ujemny, pomimo że potencjał jej jest dodatni. Stan taki nazwalimy **anomaliami** $+-$.

Przebieg zmienności wielkości H , H' , Δ przedstawia rys. 2, w którym założono $V'=200$ woltów; $V=500$ woltów; $r=45$ cm, $r'=90$ cm. Obszar anomalii $+-$ jest zakreskowany.

Stan anomalii $--$ możemy osiągnąć także przez zbliżanie do siebie kul K , K' nie połączonych z baterią, ale izolowanych. Musimy wtedy



Rys. 2. Zmiany ładunków dwóch kul o stałych potencjałach przy zmiennej odległości obu kul.



Rys. 3. Zmiany potencjałów dwóch kul o stałych ładunkach przy zmiennej odległości obu kul.

przyjąć, że ładunki łączne H , H' obu kul są niezmiennie. Jeżeli założymy tytułem przykładu, że

$$H < 0; \quad H' > 0, \quad (7)$$

to w trakcie zbliżania kul (w stanie normalnym) będzie

$$\Delta < 0; \quad \Delta' > 0; \quad (8)$$

w miarę zmniejszania się odległości D wartość Δ' rośnie, tak że otrzymany z (2) ładunek główny q' ;

² Według terminologii stosowanej w fizyce.

$$q' = H' - \Delta' \quad (9)$$

monotonicznie maleje. Można osiągnąć stan, w którym

$$H' = \Delta' \quad \text{albo} \quad q' = 0. \quad (10)$$

Na podstawie (1) będzie wówczas $V' = 0$, tzn. kula K' uzyskuje wtedy potencjał nieskończenie odległej sfery K_∞ . Stan taki możemy traktować jako uziemienie kuli K' (pkt $E_{K'}$, na rys. 3). Przy dalszym zbliżaniu kul poza pkt $E_{K'}$, będzie już $H' < \Delta'$ i ładunek q' , z nim zaś zatem również i potencjał V' stanie się ujemny. Ponieważ przy tym ładunek H' będzie nadal dodatni, przeto i tu wkroczyliśmy w obszar anomalii (zakreskowany obszar na rys. 3).

Przy innych, nieco bardziej skomplikowanych procesach można nawet dwukrotnie przebiegać przez obszar anomalii, który rozciąga się zawsze od punktu influencji J do punktu uziemienia E (patrz [7]).

Rozważania powyższe były konieczne w celu zrozumienia dalszych wniosków. Dotyczyły one pola elektrostatycznego dwóch kul, jednakże pod względem jakościowym i w przybliżeniu można przyjąć, że są one słuszne również i dla ciał dowolnego kształtu o wymiarach skończonych

3. OBRAZY PÓŁ I SCHEMATY ZASTĘPCZE

Jak wiadomo, w badaniu zjawisk elektrostatycznych możemy główną uwagę zwracać bądź na ładunki i potencjały elektryczne, bądź też na układ linii pola. W rozdziale 2 postępowaliśmy w myśl koncepcji Coulombowskiej (tj. pierwszej); obecnie zajmiemy się analizą pola w myśl koncepcji Faradaya.

Rozważymy tu możliwości struktury pola dwóch kul K, K' , przy czym przede wszystkim zajmiemy się najbardziej interesującym nas przypadkiem, gdy

$$H > 0; \quad H' < 0 \quad \text{i} \quad H > |H'|; \quad (11)$$

w celu skonkretyzowania tematu założymy, że łączne ładunki obu kul wynoszą

$$H = +18 \text{ nC}; \quad H' = -5 \text{ nC}.$$

Zakładamy, że obie kule są izolowane. Przyjmujemy takie wymiary i odległości obu kul, że potencjały ich są: $V > 0, V' < 0$; wykluczamy zatem na razie stan anomalii. Rysując obrazy pól będziemy zakładali, że jedna linia pola odpowiada ładunkowi 1 nC, tzn. z powierzchni kuli K musi wychodzić 18 linii pola, na powierzchni kuli K' zaś musi kończyć się (jako rezultat algebraicznego sumowania) 5 linii pola.

Ze względu na to, że potencjał kuli K jest najwyższy, powierzchnia tej kuli nie może stanowić ujścia dla żadnej linii i wszystkie linie są liniami wychodzącymi. Zakładamy, że z tych 18 linii 13 linii kończy się

na kuli K' , zaś $(18-a)$ linii kończy się na nieskończenie odległej sferze K_∞ . Wobec tego, że potencjał sfery K_∞ jest wyższy od ujemnego potencjału kuli K' , liczba linii pola wychodzących z ∞ i wchodzących do K' wynosić musi $(5-a)$; wynika stąd dalej, że na K_∞ kończy się $(18-a)$ wchodzących i $(5-a)$ linii wychodzących. Liczba a jest nieznana, musi być jednak $a > 0$ ze względu na to, że $V > V'$.

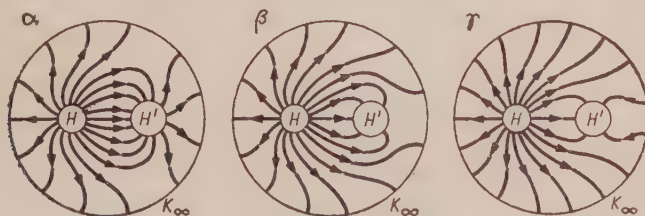
Możemy sporządzić tabelkę formalnych możliwości (przyjmując tylko całkowite liczby linii) z punktu widzenia tylko prawa Gaussa:

	nr 1	nr 2	nr 3	nr 4	nr 5	nr 6	nr 7	nr 8	nr 9
	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$ itd.
$K \rightarrow K'$	a	1	2	3	4	5	6	7	8
$K \rightarrow K_\infty$	$18-a$	17	16	15	14	13	12	11	10
$K_\infty \rightarrow K'$	$5-a$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
									-4 itd.

Liczby ujemne w trzecim wierszu tablicy oznaczają, że kierunek niektórych linii jest przeciwny względem przyjętego (tzn. jest $K' \rightarrow K_\infty$). Wszystkie powyższe możliwości są dopuszczalne z punktu widzenia prawa Gaussa. Pod względem jakościowym można je podzielić na 3 grupy:

$$(a) \ a > 5; \quad (\beta) \ a = 5; \quad (\gamma) \ a < 5.$$

Rys. 4 przedstawia typowe obrazy pola grupy a ($a=9$) i grupy γ ($a=3$) oraz obraz pola odpowiadającego przypadkowi β . Od razu można zauwa-



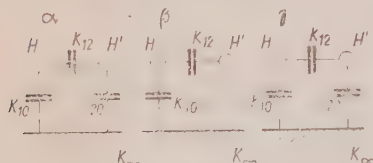
Rys. 4. Teoretyczne możliwości schematycznych obrazów pola dwóch kul przy założeniach $H=18$ nC, $H'=-5$ nC.

żyć, że przy przyjętych wyżej założeniach pole (α) powstać nie może, ponieważ potencjał K_∞ jest wyższy od ujemnego potencjału kuli K' (można zresztą bezpośrednio dowieść, że wszystkie linie pola kończące się na powierzchni K' są liniami wchodzącymi, por. [16]). Pozostają zatem tylko 2 możliwości struktury pola (β) i (γ). W załączniku do niniejszego artykułu przeprowadzony został dowód, że również i pole typu (γ) nie jest możliwe³, że zatem przy przyjętych założeniach pole będzie zawsze miało budowę odpowiadającą rysunkowi (β).

³ Tym samym skwitowana jest słuszna uwaga prof. Jakubowskiego podana w odnośniku 4.

Postaramy się jeszcze rozszyfrować pole o postaci (a) i ustalić, w jakich warunkach (przy zmianie poczynionych wyżej założeń) powstałaby właśnie taka struktura pola. Skoro w polu tym istnieją linie przebiegające od kuli K' do K_∞ to potencjał V' musi być większy od zera. Z drugiej strony, obliczając liczby linii pola kończące się na K' , stwierdzamy łatwo, że ładunek q' tej kuli jest ujemny (-5 nC). Widzimy zatem, że pole (a) odpowiada stanowi anomalii $+$ —.

Obrazy pól α , β , γ umożliwiają łatwe skonstruowanie schematów zastępczych, przedstawiających rzeczywiste pojemności istniejące między kulami K , K' i sferą ∞ odległą K_∞ . Schematy zastępcze dla tych trzech przypadków przedstawia rys. 5 (podany został tu schemat zastępczy



Rys. 5. Schematy połączeń odpowiadające obrazom pól z rys. 4.

również i dla przypadku (γ), który jak ustaliliśmy wyżej, nie może zachodzić; zrobione to zostało dlatego, że nierealność przypadku (γ) uwarunkowana jest specjalnymi poczynionymi przez nas założeniami; przy innym geometrycznym układzie struktura (γ) może okazać się realna, jak to wykazemy niżej).

Zestawiając rys. 4 i rys. 5 możemy stwierdzić, jakie ładunki znajdują się na okładkach kondensatorów zastępczych (na przykład w przypadku α) na okładkach kondensatora K_{12} znajduje się ładunek 9 nC , na okładkach kondensatora K_{20} — 4 nC itd.).

4. WSPÓŁCZYNNIKI POTENCJALNE I POJEMNOŚCIOWE. POJEMNOŚCI CZĄSTKOWE

Weźmy układ n przewodników $1, 2 \dots n$, których potencjały wynoszą $V_1, V_2 \dots V_n$ i których ładunki są $q_1, q_2 \dots q_n$. Stosując zasadę superpozycji stanów równowagi, twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań pola elektrostatycznego oraz twierdzenie Gaussa-Greena o wzajemności, dochodzimy do równań oznaczonych w artykule prof. Jakubowskiego przez (1); równania te napiszemy tu krótko w postaci

$$V_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} q_k \quad (i=1, 2 \dots n). \quad (12)$$

Współczynniki s_{ik} ($i=1, 2 \dots n, k=1, 2 \dots n$) nazywają się współczynnikami potencjalnymi Maxwella; zależą one wyłącznie od geometrycznych wymiarów układu przewodników oraz od własności środowisk dielektrycznych wchodzących w jego skład i nie zależą od stanu elektrycznego tego układu (tzn. od ładunków i od potencjałów). Dalsze własności współczynników s_{ik} są następujące:

I. dla $i \neq k$ jest

$$s_{ik} = s_{ki} \quad (13)$$

(dla $i=k$ równość powyższa jest tożsamością).

II. Wyznacznik Δ składający się z n^2 elementów s_{ik} nie równa się zeru:

$$\Delta = |s_{ik}| \neq 0. \quad (14)$$

Na podstawie (14) możemy rozwiązać układ równań (12) względem q_k , po czym otrzymujemy

$$q_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} V_i \quad (k=1, 2 \dots n). \quad (15)$$

Równania te oznaczone są w artykule Jakubowskiego przez (3).

Współczynniki c_{ik} nazywane są w literaturze współczynnikami pojemnościowymi Maxwella; są one funkcjami współczynników s_{ik} i dlatego zależą również wyłącznie od geometrycznych wymiarów układu oraz od własności środowisk dielektrycznych wchodzących w jego skład, nie zależą zaś od stanu elektrycznego układu. Dalsze własności współczynników c_{ik} :

$$\text{I dla } i \neq k \text{ jest} \quad c_{ik} = c_{ki}, \quad (16)$$

$$\text{II} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_{ik} c_{kj} = \delta_{ij}, \quad (17)$$

gdzie δ_{ij} oznacza symbol Kroneckera; wreszcie

$$\text{III} \quad |c_{ik}| = \frac{1}{\Delta} \neq 0. \quad (18)$$

Jeżeli układ przewodników $1, 2 \dots n$ jest układem odosobnionym, to

$$\sum_{i=1}^n q_i = 0. \quad (19)$$

Zastosujemy teraz równania powyższe do układu odosobnionego, składającego się z dwóch kul o ładunkach H, H' o potencjałach V, V' i ze sfery ∞ odległej K_∞ . Mamy wówczas, zakładając, że potencjał K_∞ równa się zeru, równania odpowiadające równaniom (4) Jakubowskiego

$$\begin{aligned} H &= c_{11}V + c_{12}V', \\ H' &= c_{21}V + c_{22}V', \end{aligned} \quad (20)$$

które często pisze się w postaci

$$\begin{aligned} H &= C_{12}(V - V') + C_{10}V, \\ H' &= C_{21}(V' - V) + C_{20}V', \end{aligned} \quad (21)$$

przy czym

$$c_{11} = C_{12} + C_{10}; \quad c_{12} = c_{21} = -C_{12} = -C_{21}; \quad c_{22} = C_{21} + C_{20}, \quad (22)$$

$$\text{albo} \quad C_{10} = c_{11} + c_{12}; \quad C_{20} = c_{22} + c_{21}; \quad C_{12} = C_{21} = -c_{12} = -c_{21}. \quad (23)$$

Wzory (21)÷(23) są zgodne z wzorami (7) i (8) Jakubowskiego.

Z drugiej strony z rys. 4 i 5 (a) i (γ) możemy bezpośrednio zestawzić równania o postaci analogicznej do (21)

$$\begin{aligned} H &= K_{12}(V - V') + K_{10}V, \\ H' &= K_{21}(V' - V) + K_{20}V', \end{aligned} \quad (24)$$

w których oczywiście $K_{12} = K_{21}$.

Podobieństwo między wzorami (21) i (24) jest powodem, dla którego w całej literaturze technicznej⁴ przyjmuje się

$$C_{12} = K_{12}; \quad C_{10} = K_{10}; \quad C_{20} = K_{20} \quad (25)$$

Relacje (25) nie są słuszne; twierdzenie powyższe będziemy starali się umotywić w dwojaki sposób.

A. Interpretacja fizyczna.

Współczynniki potencjalne c_{ik} mają stosunkowo prostą interpretację fizyczną. Jeżeli na przykład w przypadku scharakteryzowanym przez (11) założymy, że $V' = 0$, to znaczy jeżeli uziemiemy kulę K' za pomocą przewodnika M łączącego K' z K_∞ , to c_{11} równa się na podstawie (20) stosunkowi ładunku H kuli K do potencjału V , który kula ta w tych warunkach przyjmie (rys. 6a); c_{11} jest zatem pojemnością istniejącą w opisanych tu warunkach między kulą K i K_∞ (z K_∞ połączona jest kula K'). W polu przedstawionym na rys. 6a linie między kulą K' i K_∞ nie przebiegają, ponieważ obie te powierzchnie mają ten sam potencjał.

Rys. 6. Schematyczne obrazy pola dwóch kul przy uziemieniu jednej z kul.

Z tego samego rysunku wynika, że współczynnik pojemnościowy c_{21} równa się stosunkowi ładunku H' , kuli K' do potencjału V , który w tych warunkach wytworzony został na kuli K ; mamy tu zatem

$$c_{11} = \frac{H}{V}, \quad c_{21} = \frac{H'}{V} \quad (26)$$

(jeżeli uwzględnimy, że H' i V mają znaki różne, to c_{21} będzie liczbą ujemną).

⁴ Przynajmniej w większości podręczników dostępnych i znanych autorowi niniejszego artykułu (patrz niżej § 4).

W podobny sposób znajdujemy uziemiając kulę K' pole przedstawione na rys. 6b. Współczynniki c_{22} i c_{12} znajdują tu interpretację analogiczną

$$c_{22} = \frac{H'}{V'}, \quad c_{12} = \frac{H_1}{V'} \quad (27)$$

Jeżeli teraz w rys. 6a rozdzielimy cały strumień linii wychodzących z kuli K na dwa strumienie, z których jeden składa się z linii kończących się na K' , drugi — z linii kończących się na K_∞ , to możemy rozważane pole przedstawić także za pomocą schematu zastępczego z rys. 7a. Podobnie znajdziemy dla pola rys. 6b schemat zastępczy rys. 7b. Wartości pojemności C_{10} , C_{20} i C_{12} na rys. 7a i 7b są zgodne z wartościami tych samych pojemności otrzymanych z równań (21) przy dokonaniu odpowiednich podstawień ($V'=0$ lub $V=0$); pojemność C_{12} ma tu oczywiście znak dodatni.

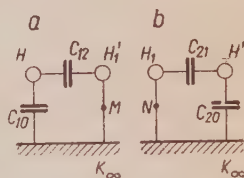
Rys. 6 przedstawia właściwie pola kondensatora o dwóch okładkach; jedną okładką, np. na rys 6a, jest powierzchnia kulista K , drugą — połączone ze sobą powierzchnie kuliste K' i K_∞ mające ten sam potencjał $V'=0$. Z tego też powodu pojemność tego kondensatora równa sumie $C_{10}+C_{12}$ jest (jak pojemność każdego układu składającego się z 2 ciał) wielkością stałą. Mamy tu (por. także wzór (21) przy założeniu $V'=0$)

$$H = (C_{10} + C_{12})V;$$

przy zmianie ładunku H (lub potencjału V) zmienia się proporcjonalnie odpowiednio wielkość V (lub H), ale struktura pola z rys. 6a pozostaje niezmienna.

Należy tu nadmienić, że niezależnie od tego, czy pole rzeczywiste ma postać jak na rys. 5a (anomalie), czy też jak na rys. 5b odnośne pola przy założeniach $V'=0$ lub $V=0$ będą miały z a w s z e j e d n a k o w ą strukturę przedstawioną schematycznie na rys. 6a i 6b. Struktura ta jest zupełnie odmienna od struktury pól rzeczywistych z rys. 4 i podobieństwo pól na rys. 4b i 6a jest tylko skutkiem schematyczności obu tych wykreśłów; w rzeczywistości potencjały kuli K' są w obu tych przypadkach rozmaite, co powoduje inne ukształtowanie linii pola przebiegających między K i K' (a w konsekwencji także i wszystkich innych) i sprawia, że pojemności między K i K' , a także między K i K_∞ mają w obu przypadkach zupełnie różne wartości (por. uwaga na końcu tego rozdziału).

Interpretacja fizyczna współczynników K_{10} , K_{20} , K_{12} ze wzorów (24) otrzymuje się bezpośrednio z obrazów pól przedstawionych na rys. 4a, 4b



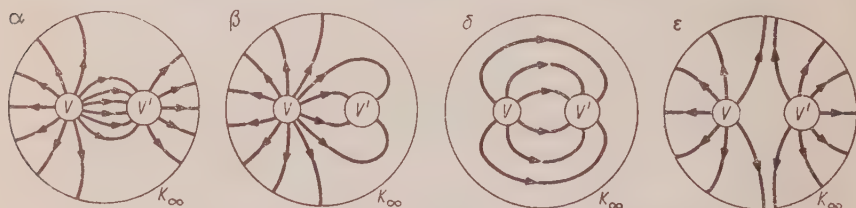
Rys. 7. Schematy połączeń odpowiadające obrazom pól z rys. 6.

oraz z ich schematów zastępczych rys. 5a, 5b. Przez porównanie ostatnich ze schematami 7a i 7b uwydatnia się szczególnie wyraźnie różnica między współczynnikami K_{ij} i C_{ij} . Różnica ta tłumaczy paradoks, o którym wspomina prof. Jakubowski na str. 10. Niektóre linie istniejące w obrazie z rys. 4a (na przykład linie od K' do K_∞) zniknęły w polu z rys. 6a, ponieważ potencjały K' i K_∞ zostały w tym polu zrównane; z drugiej strony z tego samego powodu pojawiły się na rys. 6a nowe linie łączące H z K_∞ , których nie ma na rys. 4.

B. Interpretacja matematyczna.

Z wzorów (23) wynika, że współczynniki C_{ij} są funkcjami współczynników potencjalnych c_{11} , c_{22} , c_{12} ; na podstawie omówionych wyżej własności tych współczynników wnioskujemy, że pojemności C_{10} , C_{20} , C_{12} zależą wyłącznie od wymiarów geometrycznych r , r' , D układu oraz od własności środowisk dielektrycznych wchodzących w jego skład, a nie zależą od stanu elektrycznego układu.

Z drugiej strony można łatwo wykazać, że współczynniki K_{ij} ze wzorów (24) figurujące w schematach z rys. 5 zależą nie tylko od wymiarów geometrycznych układu, lecz także od jego stanu elektrycznego, tzn. od potencjałów V , V' lub od ładunków Q , q' . Rozważmy w tym celu rys. 8 przedstawiający pola tego samego (niezmiennego pod wzglę-



Rys. 8. Schematyczne rzeczywiste obrazy pola dwóch kul.

dem geometrycznym i środowiskowym) układu dwóch kul K , K' , jednakże przy założeniu, że w każdym z czterech przedstawionych na tym rysunku przypadków inne są ładunki i potencjały obu kul. Założono w szczególności

w przyp. rys. 8a	$H > 0$; $H' < 0$ (anomalja);
„ „ „ 8b	$H > 0$; $H' < 0$; $H > H' $;
„ „ „ 8d	$H > 0$; $H' < 0$; $H = -H'$;
„ „ „ 8e	$H > 0$; $H' > 0$; $H = H'$

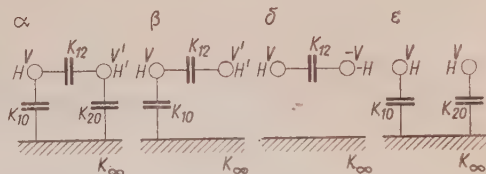
(rys. 8a i 8b przedstawiają pola o strukturze analogicznej do 4a i 4b).

Schematy zastępcze pól z rys. $8a \div \varepsilon$ przedstawione są na rys. $9a \div \varepsilon$ (jest oczywiste, że w każdym z tych schematów współczynniki K_{ij} mają inną wartość).

Możemy sobie przedstawić proces ciągły w którego wyniku otrzymamy kolejno pola przedstawione na rys. $8a \div \varepsilon$.

Załóżmy na przykład, że kula K zachowuje niezmienny ładunek H , że natomiast ładunek H'

kuli K' będziemy zmieniali w sposób ciągły począwszy



Rys. 9. Schematy połączeń odpowiadające obrazom pól z rys. 8.

od wartości	poprzez wartość	i poprzez wartość	do wartości
$H' = -H$	$-H < H' < 0$	$H' \approx 0$	$H' = +H$
przypadek (δ)	(β)	(α)	(ε)

Podczas tego procesu zmieniać się będą również w sposób ciągły wartości współczynników K_{ij} . Tak na przykład K_{11} będzie się zmieniać od wartości $K_{11}=0$ w przypadku (δ) do wartości $K_{11}=H/V$ w przypadku ε ; jednocześnie pojemność K_{12} zmniejsza swoją wartość od $K_{12}=H/2V$ w przypadku (δ) do $K_{12}=0$ w przypadku (ε). (Zakładamy przy tym, że między K i K' na rys. 8ε nie przebiegają żadne linie pola; jeśli takie linie istnieją, to $K_{12} \neq 0$). Wartości współczynników K_{ij} w tych przypadkach jak i w każdym przypadku pośrednim będą zależały zatem od stanu elektrycznego układu.

Wynika stąd, że wzory (24) właściwie powinny być explicite napisane na przykład w sposób następujący:

$$\begin{aligned} H &= (V - V') K_{12}(r, r', D, V, V') + V K_{10}(r, r', D, V, V'), \\ H' &= (V' - V) K_{21}(r, r', D, V, V') + V' K_{20}(r, r', D, V, V') \end{aligned} \quad (28)$$

[funkcji $K_{ij}(r, r', D, V, V')$ można także nadać postać $K_{ij}(r, r', D, H, H')$]. Jest teraz oczywiste, że z porównania tych wyrażeń z napisanymi explicite wyrażeniami (21)

$$\begin{aligned} H &= (V - V') C_{12}(r, r', D) + V C_{10}(r, r', D), \\ H' &= (V' - V) C_{21}(r, r', D) + V' C_{20}(r, r', D) \end{aligned} \quad (29)$$

nie wynikają relacje (25). Dla niezmiennych r, r', D współczynniki C_{ij} w (29) są stałe, podczas gdy współczynniki K_{ij} w (28) są funkcjami V i V' . Wynika stąd dalej, że nie jest słuszną żadną nie będącą tożsamością

relacja o charakterze ogólnym łącząca w jednym wzorze współczynniki K_{ij} oraz C_{ij} (lub c_{ij})⁵.

Jest oczywiste, że w danych konkretnych warunkach istnieje tylko jeden układ równań (29); natomiast z matematycznego punktu widzenia można napisać bardzo wiele równoważnych układów równań o postaci (28) przyjmując rozmaite wyrażenia za K_{ij} . Jako prosty przykład tego służyć może tożsamość

$$ax + by = (a + fxy + Fy^2)x + (b - fxy - Fx^2)y,$$

gdzie a i b są stałymi współczynnikami, f i F zaś dowolnymi funkcjami zmiennych x i y . Określonymu konkretnemu obrazowi pola odpowiadają pewne konkretne wyrażenia K_{ij} .

W związku z tym można stwierdzić, że współczynniki K_{ij} są parametrami układów pól, których przykłady przedstawione są na przykład na rys. 4 lub 8, współczynniki C_{ij} zaś — parametrami układów pól przedstawionych na rys. 6. Wszystkie te wielkości mają charakter parametrów całkowitych; uwzględnione są w nich (i wpływają na ich wartości liczbowe) wszystkie istniejące w danym polu zakrzywione linie tego pola i nawet zmiana samej krzywizny tych linii wpływa (na skutek zmiany wartości całki $K \cdot dl$) na wartość parametrów. Współczynniki C_{ij} są wielkościami stałymi, ponieważ dotyczą one w istocie rzeczy układu dwuelektrodowego, w którym ładunek jednej z elektrod jest proporcjonalny do napięcia między elektrodami; zmiana ładunku jednej elektrody z H_1 na H_2 powoduje analogiczną zmianę ładunku drugiej z $-H_1$ na $-H_2$, a struktura pola przy tym się nie zmienia. Współczynniki K_{ij} nie są wielkościami stałymi, ponieważ dotyczą pola trójelektrodowego (lub pola o większej liczbie elektrod), w którym każda zmiana ładunku albo potencjału elektrod zmienia ukształtowanie całego pola.

5. UOGÓLNIENIA. WSPÓŁCZYNNIKI C_{ij} I K_{ij} W LITERATURZE TECHNICZNEJ

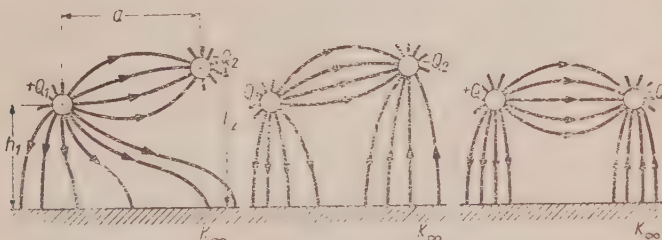
Rozważania nasze przedstawiliśmy w oparciu o pole dwóch kul; powodem tego jest, że pole takie stanowi najprostszy przypadek pola trzech

⁵ W związku z powyższym należy przyznać, że błędny jest wzór (20) w moim artykule [6], który właśnie taką relację przedstawia; we wzorze tym należy skreślić „ $= -c_{12}$ ”. Artykuł ten może wydawać się niejasny, bo nie wprowadza wyraźnego rozróżnienia między współczynnikami C_{ij} i K_{ij} (oba oznaczane są jednakowo przez C_{ij}), co słusznie podkreślił prof. Jakubowski w uwadze na str. 10 swego artykułu.

Z drugiej strony nie można zgodzić się z końcowym ustępem p. 2 tego artykułu, według którego fizyczną interpretację wzorów stanowi rys. 2. Jak to wykazano wyżej, pojemności C_{ij} w rys. 2 zależą od stanu elektrycznego układu, podczas gdy współczynniki C_{ij} we wzorach (8) są od stanu elektrycznego niezależne.

naładowanych ciał i że istnieją dlań równania (5) pozwalające obliczać wartości współczynników K_{ij} ; zaznaczyć przy tym należy, że równania (5) są zupełnie ściśle, jeżeli jako S, S', T, T' rozumieć ściśle sumy odnośnych nieskończonych szeregów; równania (5) nabierają charakteru przybliżenia, jeżeli dla funkcji S, S', T, T' przyjąć cytowane wyżej wyrażenia przybliżone. Równania (5) mają zawsze charakter równań przybliżonych, jeżeli kształt powierzchni obu elektrod w mniejszym lub większym stopniu odbiega od postaci kulistej.

Jednakże pozostałe nasze rozumowania podstawowe nie uwzględniały kulistości kształtu elektrod i miały charakter ogólny; w szczególności dotyczy to równań (20), (21) i (24). Dlatego też wyciągnięte wyżej wnioski nie ograniczają się do dwóch kul K, K' a mogą być zastosowane również do ciał K, K' o dowolnej postaci. (Oczywiście ukształtowanie pola ulega przy tym radykalnej zmianie). Jakkolwiek w praktyce mamy do czynienia zawsze z ciałami o wymiarach skończonych, jednakże nawet i ten warunek nie jest istotny; możemy również te same rozważania rozwinąć w zastosowaniu na przykład do dwóch prostoliniowych, równoległych, nieskończenie długich przewodów. W tym przypadku zmienia się również i postać trzeciej elektrody, za którą wtedy najdogodniej jest przyjąć ∞ odległą powierzchnię walcową o osi równoległej do przewodów lub też płaszczyznę równoległą do obu przewodów. W związku z tym mogą powstać formy pola nie spotykane przy dwóch elektrodach o wymiarach



Rys. 10. Schematyczne rzeczywiste obrazy pól dwóch równoległych przewodów.

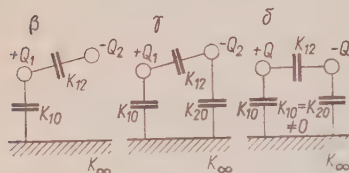
skończonych, na przykład pola o postaci pokazanej na rys. 10 (por. także rys. 4 γ). Przy spełnionym warunku

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} > \frac{a^2 + h_1^2 + h_2^2}{h_1 h_2} \quad (30)$$

(λ_1 i λ_2 są gęstościami liniowymi przewodów o pomijalnie małym przekroju; $\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 < 0$) osiąga się postać pola przedstawioną na rys. 10 β przypominającą strukturę pola z rys. 4 β . Natomiast przy jednakowych gęstościach liniowych odmiennego znaku pole przybiera, przy ($h_1 = h_2$) postać

rys. 10 δ podobniejszą do pola z rys. 4 γ niż, jak można by się spodziewać, do pola z rys. 8 δ . Schematy zastępcze pól z rys. 10 γ , β i δ przedstawiają rysunki 11 γ , β i δ .

Podobne rozważania i wnioski dotyczą również ogólnie biorąc i układów składających się z większej liczby ciał; można je między innymi zastosować zatem na przykład do układu składającego się z ziemi i trzech przewodów prostoliniowych równoległych (linia trójfazowa).

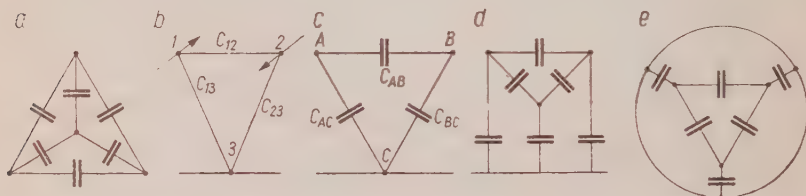


Rys. 11. Schematy połączeń odpowiadające obrazom pól z rys. 10.

nadzwyczaj częstym jest pojęciowe identyfikowanie współczynników K_{ij} i C_{ij} . Podamy kilka przykładów.

Küpfmüller [9] mówi wprawdzie (str. 90) o matematycznym znaczeniu równań typu (21) (dla większej liczby ciał), jednakże bezpośrednio po tym utożsamia współczynniki w tych równaniach z pojemnościami figurującymi w schematach analogicznych do rys. 9a (str. 93) oraz 12a (str. 96).

Podobnie postępuje Wallot [29], który (na str. 36 i 37) w celu znalezienia prądów pojemnościowych płynących w przewodach linii wprowadza pojemności typu K_{ij} stosując schemat przedstawiony na rys. 12b i następnie oblicza te pojemności za pomocą równań analogicznych do (21).



Rys. 12. Schematy połączeń pojemności cząstkowych linii trójprzewodowej stosowane przez rozmaitych autorów.

Również Nowacki [24], str. 25—27, Kaller [19], str. 128 i 129, Weiss [30], str. 421 i [31], str. 86 i Kończykowski [20], str. 302 i 303 wyprowadzają pojemności w schematycznym połączeniu analogicznym do rys. 9a z równań typu (20).

Pozostali cytowani tu przeze mnie autorzy zajmują się obliczaniem pojemności tylko linii trójfazowych.

Schönfeld [26] biorąc za podstawę rys. 12c pisze (str. 133):

„Die Teilkapazität zwischen zwei Leitern ist abhängig nicht nur von Gestalt und Lage dieser beiden Leiter selbst, sondern auch von der aller anderen des Systems”

nie wspominając jednak o zależności od potencjałów lub ładunków. Buchhold [16] i Fraenckel [18] obliczają pojemności z rys. 12d za pomocą wzorów o charakterze (20) dla 3 przewodów: [18], str. 208 i 209; [16], str. 468; podobnie postępuje Kończykowski [20], str. 308 i 304 ÷ 307 oraz [21], jak również Simonyi [27], str. 234 i 235.

Kyser [22] przechodzi nad omawianymi tu zagadnieniami bardzo po-bieżnie; z tekstu jednak (str. 442) wynika, że nie rozróżnia on wielkości K_{ij} i C_{ij} .

Nietuszył i Poliwanow [23] str. 42, wyprowadzają równania dla ładunków trzech żył kabla z rys. 12e, po czym przyrównują te równania do równań typu (15).

Uwagi powyższe nie są pomyślane jako zarzuty dla autorów, wśród których znajdują się bardzo wybitne nazwiska; zamieszczając je autor niniejszego artykułu chciał tylko wykazać, że problemy powyższe nie są jeszcze dostatecznie naświetlone w literaturze.

6. PRZYDATNOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKÓW K_{ij} i C_{ij}

Jest rzeczą niewątpliwą, że z matematycznego punktu widzenia równania (28) są bardziej skomplikowane niż równania (29), choćby dlatego, że dla danego układu geometrycznego współczynniki C_{ij} występujące w (29) są wielkościami stałymi, podczas gdy współczynniki w (28) są skomplikowanymi, przeważnie nieznanymi i trudno dającymi się obliczać funkcjami stanu elektrycznego układu. Jednakże wartości użytkowej jakiegś wielkości nie można uzasadniać matematyczną prostotą wyrażenia, które wielkość tę przedstawia, ale przede wszystkim (i chyba wyłącznie?) jej fizycznym znaczeniem. I pod tym względem współczynniki K_{ij} wysuwają się na pierwsze miejsce.

Jest to spowodowane tym, że każdego technika interesuje przede wszystkim aktualne rzeczywiste pole, które jest przedmiotem jego rozważań. Do tego pola nawiązują współczynniki K_{ij} . Natomiast wielkości C_{ij} dotyczą pól otrzymanych przez dokonanie w połączeniu elektrod pewnych zewnętrznych zmian (uziemiaenie bądź jednej bądź innej elektrody), a zatem pól od pierwotnego zupełnie odmiennych, pól w rzeczywistości nie istniejących, więc fikcyjnych. Pola te zawierają linie, których nie ma w polu rzeczywistym i odwrotnie, nie ma w nich linii rzeczywiście fizycznie istniejących. Jedynym elementem stałym występującym wspólnie w polach rzeczywistych i w omawianych tu polach fikcyjnych jest

niezmienny układ elektrod. Jednakże nauczyliśmy się już od dawna i to właśnie od Faradaya i Maxwella główną przyczynę i siedlisko zachodzących zjawisk elektrycznych upatrywać w pierwszym rzędzie w samym polu. A właśnie wnioskowanie o własnościach aktualnie danego rzeczywistego pola z własności pól fikcyjnych i zniekształconych jest niestety nie trudne, jeżeli nie wręcz niemożliwe.

Prof. Jakubowski mówi (str. 10), że współczynniki C_{ij} są stosowane do obliczeń; istotnie, takie obliczenia znajdujemy w bardzo wielu podręcznikach. Wykazano jednak wyżej (patrz rozdział 3), że stosowanie współczynników C_{ij} polega w przeważającej większości przypadków na nieporozumieniu, ściślej mówiąc, na nierozróżnianiu wielkości K_{ij} i C_{ij} ; autorzy mają na myśli pojemność K_{ij} , a podstawiają zamiast niej znaną i łatwo dającą się obliczyć pojemność C_{ij} .⁶

Rozważmy, w jakim celu dokonujemy obliczeń, do których stosuje się powyższe pojemności. Jeżeli chodzi o energetykę, to w pierwszym rzędzie zależy nam na obliczeniu prądów przepływających bezpośrednio od jednego przewodu do drugiego; prądy te będące prądami obocznymi w stosunku do prądów przepływających przez odbiornik, powodują niesymetrię w sieci i zwiększają obciążenie linii. Jest oczywiste, że do tych obliczeń konieczne są schematy zastępcze, mające charakter schematów z rys. 5, 9, 11 lub 12 i zawierające elementy K_{ij} . Ze schematów tych energetycy wywodzą pojęcie tzw. pojemności roboczej (Betriebskapazität) (por. Weiss [30] str. 421, Buchhold [16] str. 469, Küpfmüller [9] str. 93, Fraenckel [18] str. 211, Kończykowski [20] str. 296) wynoszącej

$$K_{12} + \frac{K_{10}K_{20}}{K_{10} + K_{20}}$$

w przypadku schematu z rys. 9a i

$$K_{10} + 3K_{12}$$

w przypadku symetrycznego układu według rys. 12a, e lub d.

Także i przy obliczaniu innych prądów przesunięcia w liniach, układach i aparatach stosuje się pojemności K_{ij} nie zaś C_{ij} ; chodzi tu bowiem o prądy rzeczywiście istniejące w danych aktualnych, rzeczywistych polach, nie zaś o domniemane prądy przesunięcia powstające w ewentualnych polach fikcyjnych.

⁶ Obliczanie wartości współczynników K_{ij} nie mieści się oczywiście w ramach tego artykułu. Obliczenie takie w zastosowaniu do układu dwóch kul w stanie normalnym przedstawione jest w [1] i [4]. Obliczenia K_{ij} dla dwóch i trzech przewodów równoległych oraz dla dwóch kul w stanie anomalii + — są trudniejsze i znajdują się w opracowaniu przez autora niniejszego artykułu.

Również i w radiotechnice przy obliczaniu obwodów rezonansowych, sprzężeń pojemnościowych, pojemności międzyelektrodowych, pojemności własnych cewek, drgań pasożytniczych etc. stosuje się wszędzie rzeczywiste pojemności K_{ij} (por. Terman [28] rys. 2—12, 5—29, 6—51, 7—16, 8—26 i inne).

7. TERMINOLOGIA

Kwestie terminologiczne wyjaśnił już prof. Jakubowski w swoim artykule. Jakkolwiek stosowana w piśmiennictwie terminologia jest nieco chwiejna, to można chyba za ustalone uważać nazwy następujące:

s_{ij} współczynnik potencjalny (Maxwella),

c_{ij} współczynnik pojemnościowy (Maxwella).

Termin *pojemność cząstkowa* używany jest w literaturze w rozmaitych znaczeniach. Ze względu na to, że, jak już wykazano wyżej, nie stosuje się w podręcznikach pojęciowego rozróżniania wielkości C_{ij} oraz K_{ij} , termin *pojemność cząstkowa* używany bywa zarówno w sensie makswel-łowskim, tj. zgodnie ze schematem rys. 7, jak i w zastosowaniu do pola rzeczywistego, tj. w myśl rys. 5, 9, 11 i 12. Dlatego też w poszczególnych przypadkach należy z tekstu i z rysunków dociekać, którą wielkość miał autor na myśli pisząc o *pojemności cząstkowej*. Dociekania takie przeprowadzono dla książek, których wykaz został zamieszczony w obu artykułach.

Niektórzy autorzy w ogóle terminu *pojemność cząstkowa* nie używają. Są to Buchhold [16], Nowacki [24], Smythe [13] i Durand [15]. Pozostałych cytowanych w obu artykułach autorów można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej należą autorzy o nastawieniu raczej fizycznym lub teoretycznym; miano *pojemności cząstkowej* nadają oni wielkości C_{ij} . Są to: Oberdorfer [25] str. 109; Buchholz [10] str. 185; Fischer [17] str. 36. Drugą, znacznie liczniejszą grupę stanowią autorzy o nastawieniu w przeważającej mierze technicznym, którzy pod wyrazem *pojemność cząstkowa* rozumieją współczynniki K_{ij} ; do grupy tej należą: Nietuszył [23] str. 42; Wallot [29] str. 38; Weiss [30] str. 421 i [31] str. 86 i 87; Schönfeld [26] str. 133; Simonyi [27] str. 235, rys. 139 i 140; Küpfmüller [9] str. 93 i 96; Fraenkel [18] str. 209; Kończykowski [20] str. 295; Kaller [19] str. 128⁷.

Prof. Jakubowski nazywa w swoim artykule współczynniki K_{ij} *pojemnościami pola wypadkowego*, chcąc odróżnić to pole od *pola składowego* (str. 10) (chodzi tu zatem o rozróżnienie terminologiczne pól z rys. 4 i 6). Trudno jest zgodzić się na tę propozycję. Pojęcie *wielkości skła-*

⁷ Do grupy tej zalicza się również i autor niniejszego artykułu; dlatego też w [1], [4] i [6] podano, że „pojemności cząstkowe zależą od stanu elektrycznego układu”.

dowe traktuje się zazwyczaj jako wielkości prostsze od otrzymywanej z nich na drodze sumowania *wielkości wypadkowej*. Tak np. składowe $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$ są prostsze od siły wypadkowej $\bar{F}$, bo mają stałe i określone kierunki; układy symetryczne trójfazowe: zgodny, przeciwny i zerowy są prostsze od niesymetrycznego układu wypadkowego. Powracając do pól wiadomo wprawdzie, że współczynniki C_{ij} są prostsze od współczynników K_{ij} , jednakże nie można tego powiedzieć o samych polach, ponieważ w zastosowaniu do krzywoliniowych obrazów klasyfikacja taka ani nie daje się przeprowadzić, ani nie przemawia do nas intuicyjnie. Poza tym owe *pola składowe* powstają na skutek zewnętrznych zabiegów (kolejne uziemianie elektrod), których sztuczność odczuwa się znacznie mocniej niż wprowadzenie np. Kartezjańskiego układu odniesienia w rozkładzie siły na siły składowe. Wieszcie *składowe* wprowadza się przeważnie po to, aby móc łatwiej obliczyć wielkość wypadkową (np. siłę wypadkową, trójfazowy układ niesymetryczny), tutaj zaś ani za pomocą pól *składowych* nie można obliczyć pola *wypadkowego*, ani też za pomocą współczynników C_{ij} (jeśli pominąć przypadek szczególny przedstawiony we wzorze (14) prof. Jakubowskiego) nie można obliczyć wielkości K_{ij} .

Rozróżnienie terminologiczne tych wielkości jest istotnie konieczne; wydaje się, że powinno ono możliwie najściślej dostosować się do obecnego stanu terminologii. Dlatego autor niniejszego artykułu proponowałby (tam, gdzie to jest potrzebne) nazywać współczynniki C_{ij} *pojemnościami cząstkowymi* Maxwella, współczynniki K_{ij} zaś — *pojemnościami cząstkowymi fizycznymi*.

WYKAZ LITERATURY

- 1—15 patrz artykuł prof. J. L. Jakubowskiego.
16. Buchhold Th., Happoldt H.: *Elektrische Kraftwerke und Netze*, 3A. Springer-Verlag, Berlin 1956.
17. Fischer J.: *Einführung in die klassische Elektrodynamik*. Berlin, Springer 1936.
18. Fraenkel A.: *Theorie der Wechselströme*. 2A. Springer-Verlag, Berlin.
19. Kaller M. J.: *Teorija elektriceskich ciepiej*. Gos. transp. izd. Moskwa 1956.
20. Kończykowski St.: *Obliczanie sieci energetycznych*, tom. I. Warszawa 1953.
21. Kończykowski St.: *Analiza niesymetrii pojemnościowej linii napowietrznych trójfazowych*. Przegl. El. 1957, s. 435.
22. Kyser H.: *Elektrische Kraftübertragung* Bd. II, 3A, Springer, Berlin 1932.
23. Nietuszył A. W., Poliwanow K. M.: *Osnovy elektrotechniki*. Cz. III. Gosenergoizd. Moskwa 1956.
24. Nowacki P.: *Linie dalekosiężne*, Warszawa 1953.
25. Oberdorfer G.: *Lehrbuch der Elektrotechnik*, Bd. I, 4A, Oldenbourg, Berlin 1944.
26. Schonfeld H.: *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik*. 2A, Hirzel Verlag, Leipzig 1952.

27. Simonyi K.: *Theoretische Elektrotechnik*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
28. Terman F. E.: *Radiotechnika*. PWT, Warszawa 1952.
29. Wallot J.: *Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik*. 5A. Springer-Verlag, Berlin 1948.
30. Weiss A. v.: *Uebersicht über die allgemeine Elektrotechnik*. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1954.
31. Weiss A. v.: *Die physikalisch-mathematischen Grundlagen der theoretischen Elektrotechnik*. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1954.
32. *Handbuch der Physik*. Herausg. Geiger und Scheel. Bd. XII. Kap. 4. Kottler, *Elektrostatik der Leiter*. Springer, Berlin 1927.

DODATEK

Dowód twierdzenia: przy założeniu (11)

$$H > 0; \quad H' < 0; \quad H > |H'| \quad (31)$$

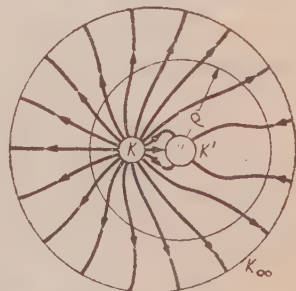
i przy stanie obu kul K, K' nie będącym stanem anomalii + — układ pola przedstawiony na rys. 4 γ nie jest możliwy, a możliwy jest tylko układ z rys. 4 β , lub innymi słowami: przy powyższych założeniach wszystkie linie pola znajdujące swe ujęcie na powierzchni K' wychodzą z powierzchni K .

Jeżeli otoczmy układ kul K, K' sferyczną powierzchnią A zakreśloną ze środka M' kuli K' (rys. 13) promieniem ϱ , to konsekwencją istnienia struktury (γ) byłoby, że nawet wtedy, gdy promień ϱ będzie dowolnie wzrastał, powierzchnię A musiałyby przecinać linie pola skierowane ku jej wnętrzu: można przypuszczać, że najwięcej takich linii znalazłoby się po stronie powierzchni A przeciwległej do kuli K (tj. mniej więcej tak jak pokazano na rys. 10). Przy strukturze (γ) pola musiałyby zatem na powierzchni A istnieć punkty P takie, że natężenie pola elektrycznego w tych punktach zawierałaby składową normalną dośrodkową (skierowaną ku M').

Wykażemy niżej, że jeśli obrany promień ϱ jest dostatecznie wielki (tzn. większy od pewnej określonej długości), to we wszystkich punktach powierzchni A składowa normalna natężenia ma zwrot odśrodkowy; tym samym błędne jest przypuszczenie, że struktura pola może mieć charakter taki jak na rys. 4 γ .

1. Rozważmy naprzód przypadek prostszy, gdy zamiast kul K i K' mamy dwa położone w punktach M i M' ładunki punktowe Q i q' (rys. 14), przy czym

$$Q > 0; \quad q' < 0; \quad Q > |q'| \quad (32)$$



Rys. 13. Do dowodu twierdzenia podanego w dodatku.

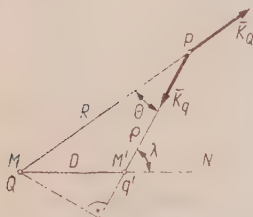
¹ Prof. Jakubowski przytacza rys. 5 przejęty z książki Duranda [15]. Rysunek ten przedstawia obraz pola 2 ładunków punktowych Q i q' , przy czym $Q/q' = -2$. Podobny rysunek podaje Kottler w [32] przy założeniu $Q/q' = -4$. Struktura pól na obu rysunkach odpowiada polu schematycznie przedstawionemu na rys. 4 β . Jednakże w żadnym z powyższych dzieł nie jest podane ani uzasadnienie pomieszczonego rysunków, ani też dowód dotyczący przypadku ogólnego. Z tego powodu wydaje się słuszne podanie tutaj tego dowodu dotyczącego ładunków umieszczonych na przewodnikach o kształcie kulistym.

Oberzmy promień ϱ kuli A tak, aby $\varrho = D = MM'$ i rozważmy punkt P położony na powierzchni tej kuli; oznaczmy

$$PM = R; \quad \angle MPM' = \theta; \quad \angle NM'P = \lambda$$

(punkt N leży na przedłużeniu prostej MM' , rys. 14). Natężenie pola w punkcie P możemy traktować jako powstałe z superpozycji dwóch składowych $\vec{K}_Q$ i $\vec{K}_{q'}$, przy czym pierwsza z nich wywołana jest w P przez dodatni ładunek Q , druga — przez ujemny ładunek q' . Mamy

$$K_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}, \quad K_{q'} = \frac{|q'|}{4\pi\epsilon \varrho^2}. \quad (33)$$



Jeżeli wykażemy słuszność nierówności

$$K_Q \cos \theta > K_{q'}, \quad (34)$$

to tym samym udowodnimy, że wszystkie linie przechodzące przez powierzchnię sferyczną A mają zwrot odśrodkowy.

Podstawiając (33) do (34) znajdujemy ze względu na relację

$$R \cos \theta = \varrho + D \cos \lambda$$

Rys. 14. Do dowodu twierdzenia podanego w dodatku (przy założeniu dwóch ładunków punktowych).

nierówność

$$\frac{Q}{R^2} \frac{\varrho + D \cos \lambda}{R} > \frac{|q'|}{\varrho^2},$$

albo

$$\frac{\varrho^2 (\varrho + D \cos \lambda)}{R^3} > \frac{|q'|}{Q}. \quad (35)$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$\frac{|q'|}{Q} = \alpha, \quad (36)$$

przy czym na podstawie (32) jest

$$0 < \alpha < 1.$$

Mamy teraz

$$\frac{\varrho^2 (\varrho + D \cos \lambda)}{R^3} > \frac{\varrho^2 (\varrho - D)}{R^3} > \frac{(\varrho - D)^3}{R^3}$$

i wobec tego nierówności (34) i (35) są spełnione, jeżeli

$$\frac{\varrho - D}{R} > \sqrt[3]{\alpha}.$$

Największą wartością, jaką może przybrać R jest $R = \varrho + D$; ostatnia nierówność jest zatem słuszna, jeżeli

$$\frac{\varrho - D}{\varrho + D} > \sqrt[3]{\alpha},$$

albo jeżeli

$$\varrho < D \frac{1 + \sqrt[3]{\alpha}}{1 - \sqrt[3]{\alpha}}. \quad (37)$$

Wynika stąd, że dla kuli A o promieniu ϱ obranym zgodnie z (37) nierówność (34) jest spełniona.

2. Rozważmy teraz układ składający się z dwóch naładowanych metalowych kul K i K' otoczonych jak na rys. 13 nieskończoną sferą K_∞ . Ładunki tych kul spełniają warunki (31). Ze względu na to, że stan układu (w myśl założenia) nie wykazuje anomalii $+$ —, ładunki główne Q, q' mają te same znaki co ładunki łączne H, H' , czyli

$$Q > 0 \quad \text{i} \quad q' < 0.$$

Obszary K i K' będziemy teraz traktowali jako wypełnione dielektrykiem o tej samej przenikalności co przestrzeń pomiędzy kulami. Zgodnie ze wzmianką na początku rozdziału 1 możemy przyjąć, że w obszarach tych znajdują się dwa nieskończone ciągi malejących ładunków a mianowicie: wewnątrz obszaru K ciąg

$$Q, Q', Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2, \dots \quad (38)$$

składający się z ładunków dodatnich, oraz wewnątrz obszaru K' ciąg

$$q', q_1, q'_1, q_2, q'_2, \dots \quad (39)$$

składający się z ładunków ujemnych.

Ładunki ciągu (38) położone są w punktach

$$M, B'_1, B_1, B'_2, B_2, \dots$$

a ładunki ciągu (39) położone są w punktach

$$M', A_1, A'_1, A_2, A'_2, \dots$$

wszystkie te punkty znajdują się na odcinku MM' (rys. 15). Sumy ładunków jednego znaku są

$$\sum Q = H; \quad \sum q = H'. \quad (40)$$

Obierzmy punkt P w dużej odległości od M i od M' ; oznaczmy odległości tego punktu od kolejno napisanych wyżej dwóch szeregów punktów na odcinku MM' przez

$$R, R_1, R'_1, R_2, R'_2, \dots \quad \text{oraz} \quad \varrho_2, \varrho_2', \varrho_1', \varrho_1, \varrho'$$

Najmniejszy z tych wszystkich odcinków będziemy oznaczali przez $r_{\min}$, największy — przez $r_{\max}$.

Rys. 15. Do dowodu twierdzenia podanego w dodatku (przy założeniu układu ładunków jak w rys. 1).

Oznaczmy dalej kąty utworzone przez promień PM z kolejnymi następnymi promieniami PB'_1, PB_1, PB'_2 itd. przez ψ'_1, ψ_1, ψ'_2 itd., a kąty utworzone przez promień PM' z kolejnymi następnymi promieniami PA_1, PA'_1, PA_2 itd. przez $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2$ itd. (rys. 15).

Oznaczmy wreszcie jak poprzednio kąt $\angle NM'P$ i $\angle MPM'$ przez λ i θ . Łączną (wypadkową) składową w kierunku PM' natężeń pola wywołanych w punkcie P przez wszystkie ładunki Q ciągu (38) albo przez wszystkie ładunki q ciągu (39) będziemy oznaczali przez $\vec{K}_Q$ albo przez $\vec{K}_q$. Wektor $\vec{K}_Q$ ma zwrot odśrodkowy $\vec{M'P}$, wektor $\vec{K}_q$ — zwrot dośrodkowy $\vec{PM'}$.

Wykażemy poniżej, że spełniona jest nierówność

$$K_Q > K_g; \quad (41)$$

tym samym udowodnimy (podobnie jak przy (34)), że wszystkie linie przechodzące przez powierzchnię A (na której położony jest punkt P) mają zwrot odśrodkowy. Mamy

$$4\pi\epsilon K_Q = \frac{Q}{R^2} \cos \theta + \frac{Q'_1}{R_1'^2} \cos(\theta - \psi'_1) + \frac{Q_1}{R_1^2} \cos(\theta - \psi_1) + \frac{Q'_2}{R_2'^2} \cos(\theta - \psi'_2) + \dots \quad (42)$$

$$4\pi\epsilon K_g = \frac{|q'|}{\varrho'^2} + \frac{|q_1|}{\varrho_1^2} \cos \varphi_1 + \frac{|q'_1|}{\varrho_1'^2} \cos \varphi'_1 + \frac{|q_2|}{\varrho_2^2} \cos \varphi_2 + \dots \quad (43)$$

Nierówność (41) pozostanie w mocy, jeżeli w wyrażeniu (42)

a) zastąpimy wszystkie kosinusy różnic kątów przez mniejszy od nich $\cos \theta$ oraz

b) zastąpimy $R, R'_1, R_1, R'_2, \dots$ przez większy od nich odcinek $r_{\max}$
a także, jeżeli w wyrażeniu (43)

a) zastąpimy wszystkie kosinusy przez większą od nich liczbę 1 oraz

b) zastąpimy $\varrho', \varrho_1, \varrho'_1, \varrho_2, \dots$ przez mniejszy od nich odcinek $r_{\min}$.

Po dokonaniu tych zmian nierówność (41) przybiera postać

$$\frac{\sum Q}{r_{\max}^2} \cos \theta > \frac{|\sum q|}{r_{\min}^2},$$

albo

$$\frac{H}{r_{\max}^2} \cos \theta > \frac{|H'|}{r_{\min}^2},$$

lub też

$$\frac{r_{\min}^2}{r_{\max}^2} \cdot \frac{\varrho' + D \cos \lambda}{r_{\max}} > \frac{|H'|}{H}.$$

Oznaczając

$$\frac{|H'|}{H} = \beta; \quad \beta < 1 \quad (44)$$

znajdujemy równoważną nierówność

$$\frac{r_{\min}^2}{r_{\max}^2} \cdot \frac{\varrho' - D}{r_{\max}} > \beta, \quad (45)$$

Niezależnie od tego, gdzie położony jest punkt P możemy zawsze przyjąć

$$r_{\max} = \varrho' + D; \quad r_{\min} = \varrho' - D;$$

podstawiając powyższe wartości do (45) znajdujemy

$$\frac{\varrho' - D}{\varrho' + D} > \sqrt[3]{\beta}.$$

Nierówność powyższa jest spełniona, jeżeli dla ϱ' przyjmiemy wartość

$$\epsilon' > D \frac{1 + \sqrt[3]{\beta}}{1 - \sqrt[3]{\beta}}. \quad (46)$$

Tym samym twierdzenie sformułowane na wstępie jest udowodnione

О ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТИЧНОЙ ЁМКОСТИ

Резюме

В практике термин «частичная ёмкость» относится всегда к системе элементов с конечными размерами; поэтому исходным положением работы является простейшее поле этого рода, т. е. поле двух шаров.

Представлены изображения таких полей, их схемы замещения и появляющиеся в них аномалии.

Затем обсуждены введённые Максвеллом потенциальные коэффициенты s_{ij} и ёмкостные коэффициенты c_{ij} , играющие важную роль при определении частичных ёмкостей C_{ij} , очень часто применяемых в технике.

На основании дискуссии изображений полей и схем замещения является возможным ввести другое определение частичных ёмкостей K_{ij} , также очень распространённое в практике.

Даны: физическая и математическая интерпретации обеих ёмкостей C_{ij} и K_{ij} ; обсуждена практическая пригодность этих величин и вопросы терминологии.

CONCEPTION OF PARTIAL CAPACITANCE

Summary

In practice the term of partial capacitance always applies to the layout of elements with finite dimensions. Therefore, as the starting point of this paper the fields of two balls are being considered as the simplest field of such a kind.

The illustrations of such fields, their equivalent schemes and associated with them anomalies are presented.

The potential coefficients s_{ij} introduced by Maxwell and the capacitance coefficients c_{ij} which play such an important part in defining of very extensively used in engineering partial capacitances C_{ij} are then described.

On the basis of the field illustrations and equivalent schemes an other definition of widely used in practice partial capacitances K_{ij} may be introduced.

The physical and mathematical interpretation of both capacitances C_{ij} and K_{ij} is given and the adaptibility of these magnitudes and the problems of terminology are discussed.



621.3.061:621.316.3:517

T. CHOLEWICKI

Wyrażenie analityczne konfiguracji obwodu elektrycznego

Rękopiś dostarczono 10. 12. 1958

W artykule obwód elektryczny typowy zostaje określony w sposób analityczny, możliwie ogólny, niezależny od wyboru oczka odniesienia lub węzła odniesienia. Określenie to następuje przy użyciu odpowiednich macierzy uogólnionych: impedancyjnej, admitancyjnej lub łączącej.

Opierając się na tym określeniu można również ustalić zasady klasyfikacji obwodów elektrycznych.

1. WPROWADZENIE

Dla określenia obwodu elektrycznego podaje się jego schemat elektryczny (przy użyciu konwencjonalnych symboli dla poszczególnych elementów) lub też schemat geometryczny, w którym węzły są zaznaczone za pomocą kropek, a gałęzie — za pomocą odcinków. Schemat elektryczny, bądź też geometryczny określają obwód w sposób graficzny.

W nowszej literaturze [2], [4], [5] można spotkać autorów, którzy określają dany obwód elektryczny sposobem analitycznym za pomocą podania odpowiedniej macierzy impedancyjnej, ponadto zaś klasyfikują obwody w zależności od wybranych własności tych macierzy.

Celem niniejszego artykułu jest pogłębienie i uogólnienie tej tematyki związanej z określeniem analitycznym i z klasyfikacją obwodów elektrycznych oraz wskazanie na możliwość dokonania pewnej syntezy w tej dziedzinie, tzn. na możliwość zaprojektowania obwodu, którego macierz impedancyjna lub admitancyjna, bądź też macierz łącząca ma z góry określone własności.

Zasadniczymi metodami rozwiązywania obwodów elektrycznych są metoda oczkowa (zwana też metodą prądów oczkowych lub prądów cyklicznych Maxwella) i metoda węzłowa (zwana też metodą potencjałów węzłowych). Po wyborze oczka odniesienia w metodzie oczkowej [4], a węzła odniesienia w metodzie węzłowej — możemy rozwiązać obwód bądź przy zastosowaniu rachunku wyznaczników, bądź też rachunku macierzy. Rozwiązanie obwodu w metodzie oczkowej polega na obliczeniu prądów oczkowych w oczkach liniowo niezależnych, a w metodzie węzłowej — na obliczeniu napięć węzłów liniowo niezależnych względem węzła odniesienia.

Stosując rachunek macierzy przyjmujemy za punkt wyjścia w metodzie oczkowej równanie napięciowe $\mathbf{Z}\mathbf{I}=\mathbf{E}'$; następnie korzystamy

z nieosobliwości macierzy impedancyjnej $\mathbf{Z}'$ [5] i obliczamy macierz prądów oczkowych $\mathbf{I}' = \mathbf{Z}'^{-1} \mathbf{E}'$. Podobnie w metodzie węzłowej wychodzimy z równania prądowego $\mathbf{Y}' \mathbf{U}' = \mathbf{I}'$ i korzystając z nieosobliwości macierzy $\mathbf{Y}'$ obliczamy macierz napięć węzłowych $\mathbf{U}' = \mathbf{Y}'^{-1} \mathbf{I}'$.

W powyższych równaniach macierz impedancyjna $\mathbf{Z}'$ jest kwadratowa, stopnia i rzędu n , gdzie przez $n+1$ oznaczamy ogólną liczbę oczek obwodu na płaszczyźnie domkniętej [4]. Podobnie macierz admitancyjna $\mathbf{Y}'$ jest kwadratowa, stopnia i rzędu n , gdzie przez $n+1$ oznaczamy ogólną liczbę węzłów obwodu.

W związku z zasadą dualizmu w elektrotechnice należy zaznaczyć, że metoda oczkowa i metoda węzłowa są zasadniczo dualne względem siebie; znane są w literaturze [4], [5] przypadki szczególne zagadnień, w których dualizm między tymi metodami nie zachodzi, nie narusza to jednak zasady ogólnej, że w podstawowych własnościach metody te są dualne.

Przy występowaniu sprzężeń dwu- lub jednostronnych między gałęziami obwodu wypisanie drugiego równania Kirchhoffa dla poszczególnych oczek jest w pewnym stopniu uciążliwe ze względu na potrzebę określenia znaku dla impedancji spowodowanych sprzężeniami; można przy tym zaznaczyć, że przy sprzężeniach magnetycznych między gałęziami i przy sprzężeniach pojemnościowych między węzłami impedancje spowodowane sprzężeniami są reaktancjami. W przypadku występowania sprzężeń dogodnie jest obliczyć macierz impedancji własnych i impedancji wzajemnych poszczególnych oczek za pomocą znanego wzoru $\mathbf{Z}' = \mathbf{C}_t \mathbf{Z} \mathbf{C}$, do którego wchodzi macierz $\mathbf{C}$ zwana macierzą łączącą prądową. Podobnie możemy obliczyć macierz admitancji własnych i admitancji wzajemnych poszczególnych węzłów za pomocą wzoru $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}_t \mathbf{Y} \mathbf{A}$, do którego wchodzi macierz $\mathbf{A}$ zwana macierzą łączącą napięciową.

Dla danego obwodu macierze $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{A}$ nie są od siebie niezależne; przy dowolnym wyborze oczka odniesienia w przypadku macierzy $\mathbf{A}$ i przy dowolnym wyborze węzła odniesienia w przypadku macierzy $\mathbf{C}$ macierze te odnoszące się do tego samego obwodu elektrycznego spełniają związek $\mathbf{C}_t \mathbf{A} = \mathbf{0}$, [4], [8], czyli są dzielnikami macierzy zerowej. Jak widać ze sposobu obliczenia iloczynu, macierz zerowa $\mathbf{0}$ ma liczbę wierszy równą liczbie oczek liniowo niezależnych, a liczbę kolumn równą liczbie węzłów liniowo niezależnych. W przypadku szczególnym mostka macierz $\mathbf{0}$ jest kwadratowa stopnia 3, w przypadku ogólnym natomiast jest to macierz prostokątna.

W teorii obwodów istnieją rozumowania, w których dla osiągnięcia pewnej ogólności nie chcemy z góry przesądzać, które oczko obwodu na płaszczyźnie domkniętej oberzemy za oczko odniesienia lub też który węzeł obwodu oberzemy za węzeł odniesienia. Idąc tą drogą dążymy do uogólnienia macierzy: impedancyjnej $\mathbf{Z}'$ i admitancyjnej $\mathbf{Y}'$ oraz do

uogólnienia macierzy łączących **C** i **A**. Napiszemy w dalszych rozdziałach takie macierze uogólnione i określimy ich podstawowe własności.

Będziemy rozpatrywali obwody elektryczne liniowe typowe dla stosowalności metod oczkowej i węzłowej, a więc spełniające szereg założeń znanych z literatury [4], [7], [9].

O liniowym, typowym obwodzie wielooczkowym zakładamy, że jest planarny, oczka są brzegami obszarów jednostopńnych i rozłącznych, że ani między gałęziami, ani też węzłami nie występują żadne sprzężenia, że każda gałąź łączy się galwanicznie z każdą inną drogą umożliwiającą przepływ prądu, że obieg oczek jest jednokrotny, a zwrot obiegu we wszystkich oczkach jest ten sam, na przykład dodatni.

Jeżeli obwód jest obwodem prądu sinusoidalnie zmiennego, to dla stosowalności rachunku symbolicznego zakładamy ponadto, że częstotliwość wszystkich źródeł jest ta sama. Jeżeli w obwodzie występują źródła prądu z równolegle dołączonymi admitancjami, to ze względów metodycznych, według ogólnie znanych zasad zastępujemy je przez źródła napięcia z szeregowo połączonymi impedancjami.

O liniowym, typowym obwodzie wielowęzłowym zakładamy, że ani między gałęziami, ani też węzłami nie występują żadne sprzężenia, że każda gałąź łączy się galwanicznie z każdą inną drogą umożliwiającą przepływ prądu, że węzeł odniesienia jest wspólny dla wszystkich napięć węzłowych, przy czym do obliczeń bierzemy bądź napięcia węzłów liniowo niezależnych względem węzła odniesienia, bądź też przeciwnie, ale nie stosujemy mieszanego sposobu liczenia napięć.

Jeżeli obwód jest obwodem prądu sinusoidalnie zmiennego, to dla stosowalności rachunku symbolicznego zakładamy ponadto, że częstotliwość wszystkich źródeł jest ta sama. Jeżeli w obwodzie występują źródła napięcia z szeregowo połączonymi impedancjami, to ze względów metodycznych, według ogólnie znanych zasad, zastępujemy je przez źródła prądu z równolegle dołączonymi admitancjami.

Przyjmijmy też założenie o charakterze metodycznym, iż obwody liniowe, typowe badamy w stanie ustalonym, wobec czego elementami macierzy **Z'** i **Y'** są odpowiednio impedancje symboliczne $\hat{Z}_{kl} = Z_{kl}(j\omega)$ i admitancje symboliczne $\hat{Y}_{kl} = Y_{kl}(j\omega)$. W przypadku badania obwodu w stanie nieustalonym należałoby rozpatrywać odpowiednio impedancje przejściowe $Z_{kl}(t)$ i admitancje przejściowe $Y_{kl}(t)$ będące funkcjami czasu [4], [9] bądź też ich transformaty, a więc impedancje operatorowe $Z_{kl}(p)$ i admitancje operatorowe $Y_{kl}(p)$. Ponieważ do pogłębienia i uogólnienia rozumowań związanych z wyrażeniem analitycznym konfiguracji obwodu wystarczy rozpatrywanie stanu ustalonego, poprzestaniemy na powyższej wzmiance dotyczącej możliwości badania obwodu w stanie nieustalonym. Należy przy tym zaznaczyć, że macierze łączące **C** i **A** mają charakter topologiczny i nie zależą od okoliczności, czy obwód badany znajduje się w stanie ustalonym, czy też nieustalonym.

2. DUALIZM W ELEKTROTECHNICE, A ZAGADNIENIA KOMBINATORYCZNE

Zastanowimy się przede wszystkim, co należy rozumieć przez konfigurację obwodu elektrycznego. Podanie ścisłej definicji konfiguracji obwodu jest zagadnieniem z zakresu topologii, a więc z zakresu nauki, badającej własności figur geometrycznych, które pozostają niezmienione przy wszelkich odwzorowaniach wzajemnie jednoznacznych i wzajemnie ciągłych. W teorii obwodów elektrycznych możemy się zadowolić przybliżonym określeniem tego pojęcia i powiemy, że liczba oczek, gałęzi i węzłów oraz ich wzajemne rozmieszczenie określają konfigurację obwodu. Dla danego obwodu można narysować schemat geometryczny na płaszczyźnie domkniętej, na sferze lub na wielościanie wypukłym takie, że wszystkie mają tę samą konfigurację [4], [6], a więc są sobie całkowicie równoważne.

Rozmowowania związane z wyrażeniem analitycznym konfiguracji obwodu rozpoczniemy od przykładu obwodu liniowego, typowego, składającego się z łańcucha trzech oczek liniowo niezależnych; obwód ten zawiera 6 gałęzi, 4 oczka oraz 4 węzły. Numerujemy w pewien, dowolny zresztą, sposób oczka i wybieramy zwrot obiegowy oczek, na przykład dodatni, jednakowy dla wszystkich oczek, rys. 1.



Rys. 1. Łańcuch 3 oczek liniowo niezależnych

Oznaczamy impedancję własną l -ego oczka przez $\hat{Z}_{ll}$, a impedancję wzajemną k -tego oczka z l -ym przez $\hat{Z}_{kl}$. Rozpatrywany obwód można scharakteryzować ogólnie przez macierz impedancyjną stopnia 4, symetryczną

$$\mathbf{Z}'_4 = \begin{bmatrix} Z_{11}, & Z_{12}, & 0, & Z_{14} \\ Z_{21}, & Z_{22}, & Z_{23}, & Z_{24} \\ 0, & Z_{32}, & Z_{33}, & Z_{34} \\ Z_{41}, & Z_{42}, & Z_{43}, & Z_{44} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ponieważ suma elementów każdego wiersza i suma elementów każdej kolumny jest zerem, macierz $\mathbf{Z}'_4$ jest rzędu 3.

Skreślając w macierzy $\mathbf{Z}'_4$ k -ty wiersz i k -tą kolumnę dla $k=1, 2, 3, 4$ otrzymujemy macierz impedancyjną „roboczą”, stopnia 3, nieosobliwą, którą oznaczaliśmy już przez $\mathbf{Z}'$. Ponieważ macierz ta zależy od wyboru wskaźnika k , pożądane jest oznaczyć ją dokładniej przez $\mathbf{Z}'_{3k}$ dla $k=1, 2, 3, 4$, przy czym pierwszy wskaźnik 3 wskazuje, że jest to macierz stopnia 3, a drugi k — że powstała z macierzy $\mathbf{Z}'_4$ przez skreślenie k -tego wiersza i k -tej kolumny.

W literaturze [3], [4], [5] można spotkać wstępne rozważania dotyczące liczby możliwych różnych sposobów rozwiązania obwodu wielo-

oczkowego, gdy następują zmiany w numeracji oczek i w wyborze zwrotu prądu oczkowego. Omówimy pokrótce tę tematykę w zakresie, który się wiąże z przedmiotem artykułu.

Przy zmianie numeracji elementów zbioru 4-elementowego liczba możliwych permutacji wynosi $P_4 = 4! = 24$. Wobec tego jeżeli zwrot obiegu 4 oczek, na przykład dodatni, nie ulega zmianie, a zmienia się jedynie numeracja oczek, liczba możliwych różnych macierzy Z'_4 wynosi $P_4 = 24$.

Możliwych różnych macierzy „roboczych” Z'_{3k} stopnia 3 jest tyle, co wariacji z 4 przedmiotów po 3, tj. $P_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$. Oznacza to, że

obwód wskazany na schemacie z rys. 1, w którym obrano pewien zwrot obiegu wszystkich 4 oczek, na przykład dodatni, można przez permutacje w numeracji oczek rozwiązać 24 różnymi sposobami.

W przypadku ogólnym rozpatrujemy typowy obwód $(n+1)$ -oczkowy na płaszczyźnie domkniętej, zawierający n oczek liniowo niezależnych oraz jedno oczko odniesienia, i typowy obwód $(n+1)$ -węzłowy, zawierający n węzłów liniowo niezależnych oraz jeden węzeł odniesienia. Obwody te są odpowiednio scharakteryzowane przez macierze uogólnione stopnia $n+1$, rzędu n , symetryczne i osobliwe

$$\mathbf{Z}'_{n+1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1, n+1} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n+1,1} & Z_{n+1,2} & \dots & Z_{n+1, n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}'_{n+1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1, n+1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n+1,1} & Y_{n+1,2} & \dots & Y_{n+1, n+1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Ogólnie znane zależności dualne między tymi obwodami można uzupełnić przez następujące związki [4].

Obwód $(n+1)$ -oczkowy

1. Suma elementów każdego wiersza i każdej kolumny macierzy impedancyjnej $\mathbf{Z}'_{n+1}$ jest zerem.
2. Liczba możliwych różnych macierzy impedancyjnych $\mathbf{Z}_{n+1}$ przy dokonywaniu permutacji w numeracji oczek wynosi $(n+1)!$
3. Liczba możliwych różnych macierzy impedancyjnych „roboczych” $\mathbf{Z}'_{nk}$ utworzonych z danej macierzy $\mathbf{Z}'_{n+1}$ przez skreślenie k -tego wiersza i k -tej kolumny wynosi $n+1$.
4. Liczba możliwych różnych macierzy impedancyjnych roboczych $\mathbf{Z}'_{nk}$ utworzonych z wszelkich możliwych macierzy $\mathbf{Z}'_{n+1}$ przy permutacji numeracji oczek wynosi $(n+1)!$

Obwód $(n+1)$ -węzłowy

- Suma elementów każdego wiersza i każdej kolumny macierzy admitancyjnej $\mathbf{Y}'_{n+1}$ jest zerem.
- Liczba możliwych różnych macierzy admitancyjnych $\mathbf{Y}'_{n+1}$ przy dokonywaniu permutacji w numeracji węzłów wynosi $(n+1)!$
- Liczba możliwych różnych macierzy admitancyjnych „roboczych” $\mathbf{Y}'_{nk}$ utworzonych z danej macierzy $\mathbf{Y}'_{n+1}$ przez skreślenie k -tego wiersza i k -tej kolumny wynosi $n+1$.
- Liczba możliwych różnych macierzy admitancyjnych roboczych $\mathbf{Y}'_{nk}$ utworzonych z wszelkich możliwych macierzy $\mathbf{Y}'_{n+1}$ przy permutacji numeracji węzłów wynosi $(n+1)!$

3. OKREŚLENIE I KLASYFIKACJA OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH ZA POMOCĄ MACIERZY UOGÓLNIONYCH IMPEDANCYJNYCH Z'_{n+1} ORAZ ADMITANCYJNYCH Y'_{n+1}

Jak już wspominaliśmy, macierz impedancyjna nieosobliwa Z'_{nk} w obwodzie $(n+1)$ -oczkowym i macierz admitancyjna nieosobliwa Y'_{nk} w obwodzie $(n+1)$ -węzłowym mają charakter macierzy *roboczych*, tj. służących bezpośrednio do rozwiązywania obwodów elektrycznych, brak im jednak cechy ogólności, gdyż macierze te zależą odpowiednio od wyboru oczka odniesienia lub węzła odniesienia. W sposób ogólniejszy obwody te są scharakteryzowane przez macierze uogólnione stopnia $n+1$ i rzędu n , wynoszące odpowiednio Z'_{n+1} i Y'_{n+1} , niezależne już od wyboru oczka odniesienia i węzła odniesienia.

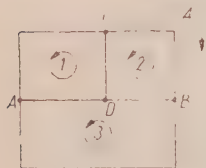
Macierze Z'_{n+1} i Y'_{n+1} określają zatem nie tylko konfigurację typowych obwodów elektrycznych liniowych, ale również i impedancje oraz admitancje wszystkich gałęzi pasywnych, złożonych z elementów idealnych R , L , C . Jeżeli ponadto znane są elementy aktywne położone w odpowiednich gałęziach i zawierające idealne źródła napięcia lub idealne źródła prądu, obwód elektryczny zostaje całkowicie określony.

Z uwagi na powyższe przesłanki dokonajmy klasyfikacji obwodów wieloczkowych według zasad następujących:

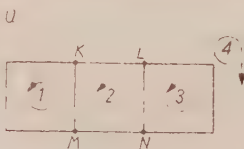
- 1) bądź według ogólnej liczby $n+1$ oczek na płaszczyźnie domkniętej,
- 2) bądź też zaliczając do jednej klasy obwodów obwody mające analogiczną konfigurację.

Zbadamy, jakie cechy charakterystyczne mają macierze uogólnione Z'_{n+1} dla obwodów elektrycznych wieloczkowych klasyfikowanych w powyższy sposób.

Przyjmijmy najpierw zasadę klasyfikacji według ogólnej liczby oczek i rozpatrzmy wszelkie możliwe typowe obwody 4-oczkowe na płaszczyźnie



Rys. 2. Mostek i jego macierz impedancyjna



Rys. 3. Obwód 4-oczkowy (łańcuch oczek) i jego macierz impedancyjna

domkniętej. W przypadku $n+1=4$ obwody te mogą być 2 rodzajów: typu mostka lub typu łańcucha oczek; na rys. 2 i 3 podane są ich schematy geometryczne.

Zaznaczymy przy tym, że obwody 4-oczkowe podane na rys. 3a i b nie różnią się od siebie, mają bowiem tę samą konfigurację, co można by bezpośrednio sprawdzić, dokonując rzutu stereograficznego płaszczyzny domkniętej na sferę [4].

W przypadku mostka każde z 4 oczek ma wspólną gałąź z każdym z oczek pozostałych, wobec czego w przypadku ogólnym macierz Z'_4 ma wszystkie elementy różne od zera. Na rys. 2 mostkowi odpowiada zatem macierz Z'_4 złożona z $4 \cdot 4 = 16$ elementów niezerowych, które są graficznie wyobrażone przez kratki zakreskowane.

W przypadku łańcucha oczek oczko 1 i 3 są skrajne i nie mają wspólnej gałęzi, wobec czego na miejscu (1, 3) i na miejscu (3, 1) w macierzy Z'_4 występują elementy zerowe. Na rys. 3 łańcuchowi oczek odpowiada zatem macierz Z'_4 mająca 14 elementów niezerowych i 2 elementy zerowe, wyobrażona graficznie przez 14 krutek zakreskowanych i 2 kratki puste, położone symetrycznie względem głównej przekątnej.

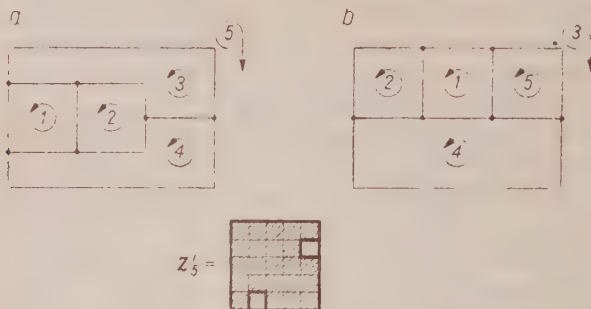
Na płaszczyźnie domkniętej jedno oczko obwodu typowego jest brzegiem obszaru jednopójnego zawierającego punkt w nieskończoności, a pozostałe oczka są brzegami obszarów jednopójnych leżących w skończoności. Wobec tego powyższe dwa obwody: mostek i łańcuch oczek, zawierające w skończoności trzy obszary jednopójne, wyczerpują możliwości typowych obwodów czterooczkowych na płaszczyźnie domkniętej.

Można jeszcze zaznaczyć, że sposób numeracji oczek, wymieniony w rozdziale 2, nie ma wpływu na ogólną liczbę elementów zerowych w macierzy Z'_4 , wpływa natomiast na miejsce tych elementów. Ze schematu łańcucha oczek widać, że elementy zerowe w macierzy Z'_4 , położone na miejscach (1, 3) oraz (3, 1) symetrycznie względem głównej przekątnej, mogą znajdować się — zależnie od sposobu numeracji oczek — na dowolnym innym miejscu, byleby były nadal położone symetrycznie względem głównej przekątnej macierzy Z'_4 .

Należy zwrócić uwagę na to, że obwody podane na rys. 2 i 3 są w przypadku ogólnym różne zarówno ze względu na konfigurację, jak i ze względu na swe macierze Z'_4 . W przypadku szczególnym jednak, gdy są to obwody prądu sinusoidalnie zmiennego takie, że gałąź $A-D$ mostka, jak również gałąź $M-N$ łańcucha oczek są bezrezystancyjne i znajdują się w stanie rezonansu napięć, gałęzie te znajdują się w stanie zwarcia i w konsekwencji konfiguracja obwodów staje się ta sama.

Przechodzimy do rozpatrzenia wszelkich możliwych typowych obwodów 5-oczkowych na płaszczyźnie domkniętej; w przypadku $n+1=5$ obwody te mogą być siedmiu rodzajów. Na rys. od 4 do 10 podane są schematy geometryczne tych obwodów i odpowiadające im macierze impedancyjne uogólnione Z'_5 .

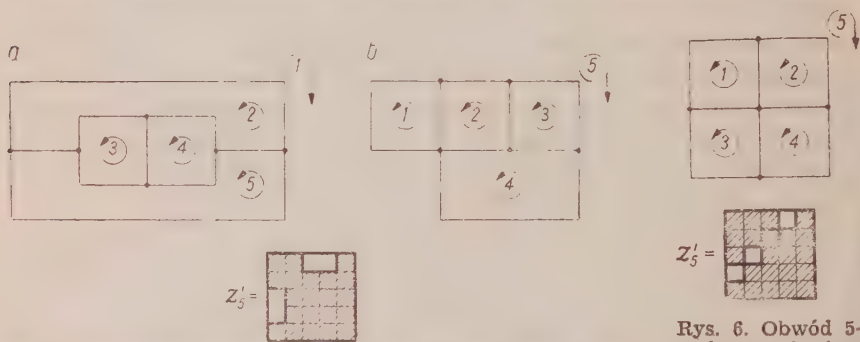
Obwody te są wyliczone w określonej kolejności, takiej mianowicie, że macierz impedancyjna uogólniona następnego obwodu ma o 0 lub 2 elementy zerowe więcej od macierzy poprzedniego obwodu; oznaczając liczbę elementów zerowych w macierzy impedancyjnej uogólnionej przez



Rys. 4. Obwód 5-oczkowy i jego macierz impedancyjna przy $N=2$

N , napiszemy, że liczba ta wynosi odpowiednio $N=2, 4, 6, 8$, a więc jest liczbą naturalną parzystą.

Obwodu 5-oczkowego, który by miał $N=0$, albo też który by miał $N>8$, nie można zbudować i powyżej podane siedem rodzajów obwodów



Rys. 5. Obwód 5-oczkowy i jego macierz impedancyjna przy $N=4$

Rys. 6. Obwód 5-oczkowy i jego macierz impedancyjna przy $N=4$

5-oczkowych na płaszczyźnie domkniętej wyczerpuje możliwości takich obwodów typowych.

Obwody 5-oczkowe, podane na rys. 4 a i b, na rys. 5 a i b, na rys. 9 a i b, nie różnią się w parach od siebie, mają bowiem tę samą konfigurację, co można by sprawdzić, dokonując rzutu stereograficznego płaszczyzny domkniętej na sferę [4].

Obwody 5-oczkowe, podane na rys. 7, 8 i 9 mają wprowadzić po $N=6$, ale różnią się od siebie, gdyż

w obwodzie z rys. 7 miejsca zerowe są cykliczne:

(1,3), (3,4) i (4,1), przy czym nie ma miejsc zerowych o wskaźnikach 2, ani 5,

w obwodzie z rys. 8 miejsca zerowe są następujące:

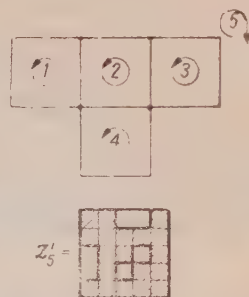
(1,3), (2,4), (4,1), przy czym nie ma miejsc zerowych o wskaźniku 5,

w obwodzie z rys. 9 miejsca zerowe są następujące:

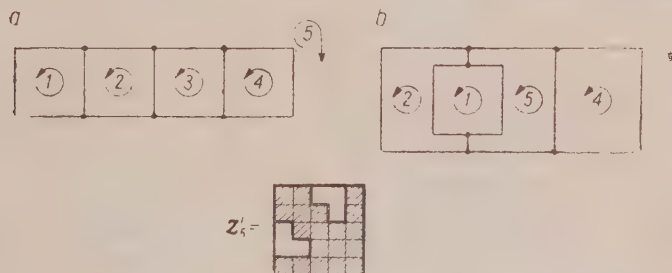
(1,3), (2,5), (4,1), przy czym wszystkie 5 wskaźników jest wykorzystanych.

Jak w przypadku $n+1=4$, tak i obecnie sposób numeracji oczek nie ma wpływu na ogólną liczbę N elementów zerowych w macierzy impedancyjnej uogólnionej dla danego obwodu typowego, sposób ten wpływa natomiast na miejsce elementów zerowych położonych symetrycznie względem głównej przekątnej.

W literaturze [2] spotyka się badania dotyczące macierzy roboczych Z'_{nk} takich, w których oczkiem odniesienia jest oczko obszaru zawierającego w sobie punkt w nieskończoności. Przeprowadzone przez nas studium macierzy impedancyjnych uogólnionych Z'_{n+1} dla obwodów 4- i 5-oczkowych ma charakter bardziej ogólny, dzięki czemu istnieje możli-



Rys. 7. Obwód 5-oczkowy i jego macierz impedancyjna przy $N=6$



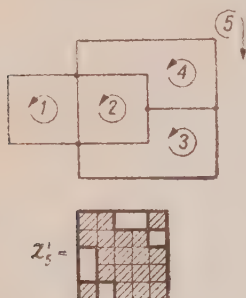
Rys. 8. Obwód 5-oczkowy (łańcuch oczek) i jego macierz impedancyjna przy $N=6$

wość wyodrębnienia większej liczby obwodów o różnej konfiguracji i inaczej usystematyzowanych niż to podają inni autorzy.

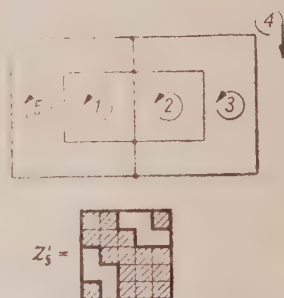
Oznaczyliśmy liczbę oczek obwodu typowego na płaszczyźnie domkniętej przez $n+1$, a liczbę elementów zerowych w macierzy impedancyjnej uogólnionej przez N ; dla danej liczby $n+1$ oznaczmy liczbę rodzajów obwodów o różnej konfiguracji przez K . Przy tych oznaczeniach możemy przedstawić otrzymane wyniki w następującym zestawieniu:

$n+1$	K	N
4	2	0 lub 2
5	7	2, 4, 6 lub 8

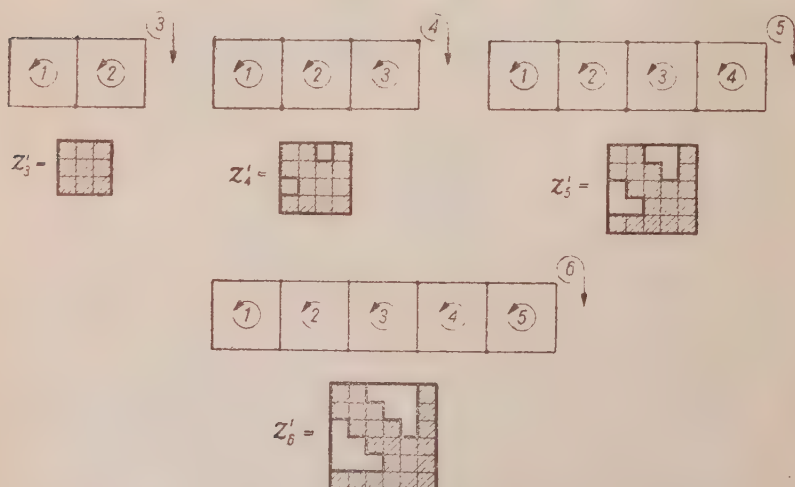
Wraz ze wzrostem liczby $n+1$ wzrasta liczba K obwodów o różnej konfiguracji oraz wzrasta liczba N elementów zerowych w macierzy impedancyjnej uogólnionej.



Rys. 9. Obwód 5-oczkowy i jego macierz impedancyjna przy $N=8$



Rys. 10. Obwód 5-oczkowy i jego macierz impedancyjna przy $N=8$



Rys. 11. Klasa łańcuchów oczek i jej macierze impedancyjne przy $N=0, 2, 6, 12, \dots$

Określenie liczb K oraz N dla obwodów o większej liczbie oczek, $n+1 > 5$, należy do tematyki z zakresu topologii i wykracza poza ramy niniejszego artykułu. W każdym razie o liczbie elementów zerowych N wiadomo, że jest liczbą naturalną i parzystą.

Przejdziemy teraz do klasyfikacji typowych obwodów wieloo czkowych, zaliczając do jednej klasy obwody o analogicznej konfiguracji. Na rys. 11 przedstawiony jest przykład klasy łańcuchów oczek przy liczbie oczek $n+1=3, 4, 5, 6$ itd.

W klasie łańcuchów oczek liczba elementów zerowych macierzy impedancyjnej uogólnionej Z'_{n+1} wynosi

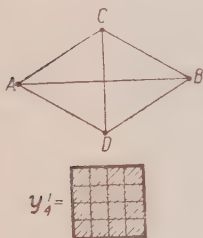
$n+1$	N
3	$0 \cdot 2 = 0$
4	$1 \cdot 2 = 2$
5	$(1+2) \cdot 2 = 6$
6	$(1+2+3) \cdot 2 = 12$
...	...
$n+1$	$[1+2+3+\dots+(n-2)] \cdot 2$

W klasie tej elementy zerowe układają się w macierzy uogólnionej Z'_{n+1} w kształt 2 trójkątów, położonych symetrycznie względem głównej przekątnej; można stąd i bez rysowania schematów wypisać z góry macierze uogólnione Z'_4, Z'_6 i dalsze dla łańcucha 6, 7 i większej liczby oczek niezależnych.

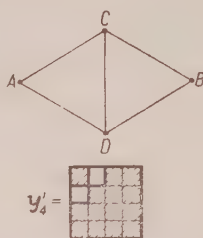
Przechodzimy na koniec do macierzy admitancyjnych uogólnionych Y'_{n+1} charakteryzujących dany typowy obwód elektryczny. Obwody 4-oczkowe: mostek i łańcuch oczek mają jednocześnie i po 4 węzły. Schemat mostka jako obwodu 4-węzłowego rysujemy częstokroć jako rzekomo nieplanarny [4], [7] tworzący wielokąt zupełny, w którym każdy węzeł łączy się bezpośrednio z każdym innym (rys. 12). W przypadku ogólnym macierz uogólniona mostka Y'_4 nie ma elementów zerowych, tj. $N=0$. Usuwając ze schematu przekątną $A-B$ otrzymujemy schemat podany na rys. 13, dla którego $N=2$, a usuwając obie przekątne — schemat podany na rys. 14, dla którego $N=4$; ostatni schemat jest równoważny w ramach schematów wielowęzłowych schematowi łańcucha oczek z rys. 3.

Podsumowując rozumowania rozdziału zaznaczymy, że klasyfikacja obwodów typowych na 4-oczkowe i na 4-węzłowe jest odrębna, gdyż wśród obwodów 4-oczkowych były tylko 2 rodzaje (mostek i łańcuch),

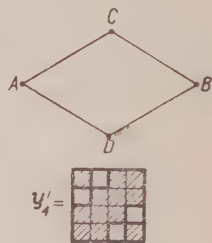
a obwodów 4-węzłowych są 3 rodzaje o schematach podanych na rys. 12, 13 i 14. Odpowiadające liczbie $n+1=4$ macierze uogólnione Z'_4 i Y'_4 mają różne liczby elementów zerowych, wynoszące dla macierzy impedancyjnych $N=0$ lub 2, a dla macierzy admitancyjnych $N=0, 2$ lub 4. A więc już dla $n+1=4$ dualizm między obwodami wielooczkowymi i wielowęzłowymi nie występuje, jeżeli za podstawę badania zależności dualnych



Rys. 12. Mostek i jego macierz admitancyjna



Rys. 13. Obwód 4-węzłowy i jego macierz admitancyjna przy $N=2$



Rys. 14. Obwód 4-węzłowy i jego macierz admitancyjna przy $N=4$

przyjmujemy liczbę K schematów o różnej konfiguracji przy danej liczbie $n+1$ oraz liczbę N elementów zerowych w macierzy uogólnionej.

W przypadku ogólnym liczba oczek obwodu typowego na płaszczyźnie domkniętej nie jest równa liczbie węzłów i wśród obwodów 5-oczkowych pokazanych na rys. 4 do 10 jest wiele takich, w których liczba węzłów jest różna od 5. Wobec tego studium wszelkich możliwych obwodów 5-węzłowych i odpowiadających im macierzy admitancyjnych uogólnionych Y'_5 należałoby przeprowadzić osobno, niezależnie od badania obwodów 5-oczkowych na płaszczyźnie domkniętej.

W każdym razie należy zaznaczyć, że typowy obwód wielowęzłowy nie musi być planarny i schemat jego może tworzyć wielokąt zupełny, w którym każdy węzeł łączy się bezpośrednio z każdym innym, na skutek czego macierz uogólniona nie zawiera elementów zerowych, $N=0$. Usuając z tego schematu poszczególne przekątne, jak w przypadku $n+1=4$, tworzymy dalsze schematy, dla których liczba N przybiera kolejne wartości naturalne parzyste.

Ponieważ już dla liczby $n+1=5$ nie można podać schematu typowego obwodu wielooczkowego, dla którego macierz uogólniona Z'_{n+1} składałaby się z samych elementów niezerowych, omawiana własność dotycząca liczby N jest jedną z cech, w których dualizm między obwodami wielooczkowymi i wielowęzłowymi nie występuje.

Jak wiadomo, węzeł oznacza co innego w sieciach i układach elektroenergetycznych, a co innego w elektrotechnice teoretycznej. W związku

z tym dodajemy, że w zakresie typowych obwodów wielowęzłowych rozumiemy przez węzeł końcówkę (zacisk) wspólną dla dwóch lub większej liczby gałęzi obwodu elektrycznego (porównaj [2], [4], [5], [7], [10]).

4. OKREŚLENIE OBWODU ELEKTRYCZNEGO ZA POMOCĄ MACIERZY UOGÓLNIONEJ PRĄDOWEJ $(\Gamma_{n+1, m})t$

Macierz łącząca prądowa $\mathbf{C}$ w typowym obwodzie wieloozdkowym, określona wzorem $\mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{I}'$, jest macierzą prostokątną, stopnia $m \times n$, gdzie m oznacza liczbę gałęzi, a n — oczek liniowo niezależnych. Macierz łącząca napięciowa $\mathbf{A}$ w typowym obwodzie wielowęzłowym, określona wzorem $\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{U}'$, jest macierzą prostokątną, stopnia $m \times p$, gdzie m oznacza liczbę gałęzi, a p — węzłów liniowo niezależnych.

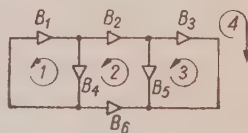
Obie te macierze łączące służą bezpośrednio do rozwiązywania obwodów elektrycznych, nie mają jednak cechy ogólności, gdyż zależą od wyboru oczka odniesienia lub węzła odniesienia.

Przypomnimy, że przechodząc od macierzy roboczych $\mathbf{Z}'_{nk}$ w metodzie oczkowej i $\mathbf{Y}'_{nk}$ w metodzie węzłowej do macierzy uogólnionych $\mathbf{Z}'_{n+1}$ i $\mathbf{Y}'_{n+1}$ uniezależniliśmy się od wyboru oczka odniesienia i węzła odniesienia. Podobnie jeżeli oprzemy się na macierzach łączących $\mathbf{C}$ i $\mathbf{A}$, ale uwzględnimy prąd oczkowy płynący w oczku odniesienia i przypiszemy istnienie napięcia węzłowi odniesienia, — uniezależnimy się od wyboru oczka i węzła odniesienia, dochodząc tym samym do macierzy ogólniejszych niż $\mathbf{C}$ i $\mathbf{A}$.

Zbadamy powyższe uogólnienie na przykładzie rozpatrywanego już obwodu 4-oczkowego i 4-węzłowego, tworzącego łańcuch oczek, pokazanego na rys. 15.

Przede wszystkim zauważymy, że metoda rozczłonkowania obwodu, doprowadzająca do wzorów $\mathbf{Z}' = \mathbf{C}_t \mathbf{ZC}$ i $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}_t \mathbf{YA}$ opiera się na rozumowaniach czysto geometrycznych, w szczególności na algebraizacji rachunku gałęzi, oczek i węzłów. Omówimy tę algebraizację, która prowadzi też do uogólnienia macierzy łączących.

Metodą obliczeń zwaną algebraizacją typu A posłużymy się do uogólnienia macierzy łączącej prądowej $\mathbf{C}$ [4]. W ramach tej algebraizacji traktujemy każde oczko zorientowane jako sumę algebraiczną gałęzi zorientowanych skojarzonych z oczkiem, a więc w przypadku obwodu pokazanego na rys. 15 istnieją 4 oczka zorientowane dodatnio: K_1, K_2, K_3, K_4 oraz 6 gałęzi zorientowanych $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$.



Rys. 15. Łańcuch oczek ze wskazaną orientacją gałęzi

Równania poszczególnych oczek są następujące:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -B_1 && -B_4 \\ K_2 &= -B_2 && +B_4 - B_5 + B_6 \\ K_3 &= && -B_3 + B_5 \\ K_4 &= B_1 + B_2 + B_3 && -B_6 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Równania te można napisać w postaci jednego równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 1, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

czyli

$$\mathbf{K}_4 = \Gamma_{46} \mathbf{B}_6. \quad (5)$$

W równaniu tym Γ_{46} jest to macierz przekształcenia gałęzi na oczka, stopnia 4×6 , stanowiąca ogniwo wiążące ze sobą macierz kolumnową gałęzi $\mathbf{B}_6$ i macierz kolumnową oczek $\mathbf{K}_4$.

W każdej kolumnie macierzy Γ_{46} występują po jednym razie elementy $+1$ i -1 , a poza tym elementy zerowe. Stąd cechą charakterystyczną macierzy Γ_{46} jest, że suma elementów każdej kolumny jest zerem. Drugą cechą charakterystyczną tej macierzy jest, że w każdym jej wierszu występuje tyle elementów niezerowych, z ilu gałęzi składa się dane oczko, przy czym element $+1$ wskazuje, że orientacja oczka jest zgodna z orientacją danej gałęzi, a element -1 , że orientacje są przeciwne.

Przechodząc z obliczeń geometrycznych do elektrycznych możemy ustalić przyporządkowanie

oczku zorientowanemu K_r odpowiada napięcie źródłowe oczkowe $\hat{E}_r'$ (termin historyczny: siła elektromotoryczna oczkowa),
gałęzi zorientowanej B_s odpowiada napięcie źródłowe gałęziowe $\hat{E}_s$,
równaniu $\mathbf{K}_4 = \Gamma_{46} \mathbf{B}_6$ odpowiada równanie

$$\mathbf{E}_4' = \Gamma_{46} \mathbf{E}_6. \quad (6)$$

Korzystamy teraz z innej metody obliczeń, zwanej algebraizacją typu B [4]. Traktujemy mianowicie każdą gałąź zorientowaną jako sumę algebraiczną dwóch oczek zorientowanych skojarzonych z gałęzią, na przykład dla gałęzi czwartej mamy

$$B_4 = -K_1 + K_2. \quad (7)$$

Równania poszczególnych gałęzi napisane macierzowo dają zależność

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

czyli

$$\mathbf{B}_6 = (\Gamma_{46})_t \mathbf{K}_4. \quad (9)$$

W równaniu tym występuje macierz przekształcenia oczek na gałęzie, oznaczona przez $(\Gamma_{46})_t$, stopnia 6×4 , stanowiąca ogniwo wiążące ze sobą macierz kolumnową oczek $\mathbf{K}_4$ i macierz kolumnową gałęzi $\mathbf{B}_6$. Jak wynika z jej znaczenia geometrycznego, macierz $(\Gamma_{46})_t$ z algebraizacji typu B jest macierzą transponowaną dla macierzy Γ_{46} z algebraizacji typu A .

Przechodzimy z obliczeń geometrycznych do elektrycznych i ustalamy przyporządkowanie

oczku zorientowanemu K_r odpowiada prąd oczkowy $\dot{I}_r$,

gałęzi zorientowanej B_s odpowiada prąd gałęziowy $\dot{I}_s$,

równaniu $\mathbf{B}_6 = (\Gamma_{46})_t \mathbf{K}_4$ odpowiada równanie

$$\mathbf{I}_6 = (\Gamma_{46})_t \mathbf{I}_4. \quad (10)$$

Z powyższego widzimy, że dla obwodu z rys. 15 macierz $(\Gamma_{46})_t$, a ogólnie dla obwodu zawierającego $n+1$ oczek i m gałęzi macierz $(\Gamma_{n+1, m})_t$ określa jednoznacznie konfigurację typowego obwodu wieloochkowego; z każdej kolumny macierzy $(\Gamma_{n+1, m})_t$ odczytujemy, jakie gałęzie są skojarzone z danym oczkiem i jaka jest ich orientacja, co pozwala nakreślić schemat geometryczny obwodu na płaszczyźnie domkniętej. Macierz $(\Gamma_{n+1, m})_t$ nazywamy macierzą uogólnioną prądową.

Dla rozwiązania typowego obwodu wieloochkowego wybieramy dowolne spośród $n+1$ oczek, na przykład oczko k -te, za oczko odniesienia i skreślamy w macierzy uogólnionej prądowej $(\Gamma_{n+1, m})_t$ k -tą kolumnę, otrzymując macierz $(\Gamma_{n, m})_t$ stopnia $m \times n$. Macierz tę oznaczamy zazwyczaj przez $\mathbf{C}$, a zależności (6) i (10) piszemy w postaci

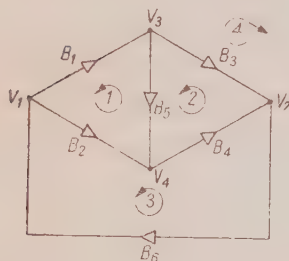
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{C} \mathbf{I}', \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{C}_t \mathbf{E} = \mathbf{C}_t \mathbf{U}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Para ostatnich wzorów stanowi przekształcenie kontragradientne [4] i w ten sposób przy zastosowaniu algebraizacji typu A oraz typu B dochodzimy metodą geometryczną do znanego wzoru $\mathbf{Z}' = \mathbf{C}_t \mathbf{Z} \mathbf{C}$. Opisana

metoda jest stosunkowo prosta w porównaniu z innymi znanymi z literatury, nie posługujemy się bowiem w naszej metodzie postulatem o niezmienniczości mocy chwilowej w dwóch układach odniesienia, [1], [5], ani też nie korzystamy z sieci elementarnej jako z niezbędnego ogniwa rozumowania [5].

5. OKREŚLENIE OBWODU ELEKTRYCZNEGO ZA POMOCĄ MACIERZY UOGÓLNIONEJ NAPIĘCIOWEJ $(\Delta_{p+1, m})t$

Przeprowadzamy rozumowania w pewnym stopniu dualne w stosunku do obliczeń wykonanych w rozdziale 4 i zbadamy uogólnienie macierzy łączącej napięciowej **A** na przykładzie mostka jako obwodu 4-węzłowego, pokazanego na rys. 16.



Rys. 16. Mostek ze wskazaną orientacją gałęzi.

Metoda obliczeń zwana algebraizacją typu C posłuży do uogólnienia macierzy łączącej napięciowej **A** [4]. W ramach tej algebraizacji traktujemy każdy węzeł jako sumę algebraiczną gałęzi w nim się zbiegających, przy czym gałęziom zorientowanym od węzła (tzn. dla których węzeł jest punktem początkowym) nadajemy znak plus, a gałęziom zorientowanym ku węzłowi (tzn. dla których węzeł jest punktem końcowym) nadajemy znak minus. Na przykład dla węzła drugiego zachodzi

$$V_2 = -B_3 - B_4 + B_6. \quad (12)$$

Równanie macierzowe węzłów mostka jest następujące

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

czyli

$$V_4 = \Delta_{46} B_6. \quad (14)$$

W równaniu tym Δ_{46} jest to macierz przekształcenia gałęzi na węzły, stopnia 4×6 , wiążąca ze sobą macierz kolumnową gałęzi **B**₆ i macierz kolumnową węzłów **V**₄.

W każdej kolumnie macierzy Δ_{46} występują po jednym razie elementy $+1$ i -1 , a poza tym elementy zerowe. Stąd cechą charakterystyczną macierzy Δ_{46} jest, że suma elementów każdej kolumny jest zerem. Drugą cechą charakterystyczną tej macierzy jest, że w każdym

jej wierszu występuje tyle elementów niezerowych, ile gałęzi zbiega się w danym węźle, przy czym element $+1$ wskazuje, że gałąź ma orientację od węzła, a element -1 , — ku węzłowi.

Przechodząc z obliczeń geometrycznych do elektrycznych możemy ustalić przyporządkowanie

węzłowi V_r odpowiada prąd źródłowy węzłowy $\hat{I}_r$,
gałęzi zorientowanej B_s odpowiada prąd gałęziowy $\hat{I}_s$,
równaniu $\mathbf{V}_4 = \Delta_{46} \mathbf{B}_5$ odpowiada równanie

$$\mathbf{I}'_4 = \Delta_{46} \mathbf{I}_6. \quad (15)$$

Korzystamy na koniec z innej metody obliczeń, zwanej algebrą izacją typu D [4]. Traktujemy mianowicie każdą gałąź zorientowaną jako sumę algebraiczną dwóch węzłów, stanowiących końcówki gałęzi; na przykład dla gałęzi pierwszej mamy

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3. \quad (16)$$

Równanie macierzowe gałęzi mostka jest wtedy następujące:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

czyli

$$\mathbf{B}_6 = (\Delta_{46})_t \mathbf{V}_4. \quad (18)$$

W równaniu tym występuje macierz przekształcenia węzłów na gałęzie, oznaczona przez $(\Delta_{46})_t$, stopnia 6×4 , stanowiąca ogniwo wiążące ze sobą macierz kolumnową węzłów $\mathbf{V}_4$ i macierz kolumnową gałęzi $\mathbf{B}_6$. Jak wynika z jej znaczenia geometrycznego, macierz $(\Delta_{46})_t$ z algebraizacji typu D jest macierzą transponowaną dla macierzy Δ_{46} z algebraizacji typu C .

Przechodzimy z obliczeń geometrycznych do elektrycznych i ustalamy przyporządkowanie

węzłowi V_r odpowiada potencjał tego węzła względem punktu odniesienia, na razie bliżej nieokreślonego; potencjał ten oznaczamy przez $\hat{U}_r$,

gałęzi zorientowanej B_s odpowiada napięcie gałęziowe $\hat{U}_s$,
równaniu $\mathbf{B}_6 = (\Delta_{46})_t \mathbf{V}_4$ odpowiada równanie

$$\mathbf{U}_6 = (\Delta_{46})_t \mathbf{U}'_4. \quad (19)$$

Z powyższego widzimy, że dla obwodu z rys. 16 macierz (Δ_{ek}) , a ogólnie dla obwodu zawierającego $p-1$ węzłów i m gałęzi macierz $(\Delta_{p-1, m})$ określa jednoznacznie konfigurację typowego obwodu wielowęzłowego; każda kolumna macierzy $(\Delta_{p-1, m})$ wskazuje, jakie gałęzie zbiegają się w danym węźle i jaka jest ich orientacja, co pozwala nakreślić schemat geometryczny obwodu. Macierz $(\Delta_{p-1, m})$ nazywamy macierzą uogólnioną napięciową.

Dla rozwiązania typowego obwodu wielowęzłowego wybieramy dowolny spośród $p-1$ węzłów, na przykład węzeł k -ty, za węzeł odniesienia i skreślamy z macierzy uogólnionej napięciowej $(\Delta_{p-1, m})$ k -tą kolumnę, otrzymując macierz $(\Delta_{p, m})$ stopnia m p. Macierz tę oznaczamy zazwyczaj przez A , a zależności (15) i (19) piszemy w postaci

$$\begin{cases} U = AU', \\ I' = A_t I. \end{cases} \quad (20)$$

Para ostatnich wzorów stanowi przekształcenie kontrgradientne [4] i w ten sposób przy zastosowaniu algebraizacji typu C oraz D dochodzimy metodą geometryczną do znanego wzoru $Y = A_t Y A$.

6. ZWIĄZEK MIĘDZY MACIERZAMI UOGÓLNIIONYMI $(\Gamma_{n+1, m})$ I $(\Delta_{p-1, m})$

Wykażemy teraz, że macierze uogólnione prądowa oraz napięciowa odnoszące się do tego samego obwodu nie są od siebie niezależne, lecz spełniają związek

$$\Gamma_{n+1, m}(\Delta_{p-1, m}) = 0, \quad (21)$$

gdzie wyraża, że jedna macierz uogólniona, mnożona lewostronnie przez transponowaną względem drugiej, daje jako iloczyn macierz zerową.

Dla dowiedzenia prawdziwości wzoru (21) wykorzystamy jednocześnie algebraizację typu A oraz D. A więc dla danego obwodu typowego uzależnimy oczko K od gałęzi B , za pomocą równania

$$K_r = \sum_a \gamma_{ra} B_a. \quad (22)$$

Równanie to wyraża algebraizację typu A, w której przez γ_{ra} rozumiemy elementy macierzy $\Gamma_{n+1, m}$ wynoszące $+1$, -1 lub 0 . Liczba oczek na płaszczyźnie dominującej wynosi $n+1$, liczba gałęzi m , a liczba węzłów $p+1$.

Z kolei dla tego samego obwodu uzależnimy gałąź B_a od węzła V_s , za pomocą równania

$$B_a = \sum_s \delta_{as} V_s. \quad (23)$$

Równanie to wyraża algebraizację typu D, w której przez δ_{as} rozumiemy elementy macierzy $(\Delta_{p-1, m})$, wynoszące $+1$, -1 lub 0 .

Tworzymy przekształcenie złożone

$$K_r = \sum_a \sum_s \gamma_{ra} \delta_{as} V_s = \sum_s \left(\sum_a \gamma_{ra} \delta_{as} \right) V_s = \sum_s \beta_{rs} V_s. \quad (24)$$

Stosownie do definicji elementu iloczynu dwóch macierzy, współczynnik

$$\beta_{rs} = \sum_a \gamma_{ra} \delta_{as} \quad (25)$$

oznacza element iloczynu macierzy $\Gamma_{n+1, m}$ przez macierz $(\Delta_{p+1, m})_t$, położony na miejscu (r, s) .

Wykażemy teraz, że wszystkie współczynniki β_{rs} są zerami. Istotnie, oczko zorientowane jest sumą algebraiczną swych zorientowanych gałęzi, przy czym początek pierwszej gałęzi pokrywa się z końcem ostatniej gałęzi oczka. Skoro gałąź z kolei jest sumą algebraiczną swych węzłów, to w zbiorze gałęzi zorientowanych tworzących oczko, każdy węzeł wystąpi dwa razy, mianowicie raz ze znakiem plus jako początek pewnej gałęzi, a drugi raz ze znakiem minus jako koniec poprzedniej gałęzi. Wobec tego w całym omawianym zbiorze tworzącym oczko (krzywą zamkniętą) wszystkie współczynniki przy węzłach muszą być zerami.

W ten sposób wykazaliśmy drogą geometryczną, że wzór (21) jest spełniony. Transponując obie strony tego wzoru można też napisać

$$\Delta_{p+1, m} (\Gamma_{n+1, m})_t = 0. \quad (26)$$

Macierz zerowa we wzorze (21) jest stopnia $(n+1) \times (p+1)$, a po transpozycji macierz zerowa we wzorze (26) jest stopnia $(p+1) \times (n+1)$.

Jeżeli teraz obierzemy dowolne z $n+1$ oczek, na przykład k -te, za oczko odniesienia i dowolny z $p+1$ węzłów, na przykład l -ty za węzeł odniesienia, to we wzorze (21) macierz $\Gamma_{n+1, m}$ traci jeden wiersz i staje się macierzą $\Gamma_{n, m}$ stopnia $n \times m$, macierz $(\Delta_{p+1, m})_t$ traci jedną kolumnę i staje się macierzą $(\Delta_{p, m})_t$ stopnia $m \times p$.

W iloczynie (21), który był stopnia $(n+1) \times (p+1)$, znika k -ty wiersz i l -ta kolumna, a pozostałe elementy tworzą nadal macierz zerową, która będzie stopnia $n \times p$, czyli

$$C_t A = 0, \quad (27)$$

a po transpozycji stron obu

$$A_t C = 0. \quad (28)$$

Wobec tego zarówno jednak macierz uogólniona wraz z macierzą transponowaną względem drugiej, jak i jedna macierz łącząca z macierzą transponowaną względem drugiej są dzielnikami macierzy zerowej.

Na przykład dla mostka wskazanego na rys. 16 liczyn macierzy wynosi

$$\Gamma_{45}(\Delta_{16})_7 = \begin{bmatrix} -1, & 1, & 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & -1, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (29)$$

Algebra macierzy oraz teoria wyznaczników i równań liniowych tworzą dział matematyki, szeroko rozbudowany i to nie tylko pod względem teoretycznym, wiążącym się z teorią funkcji, z topologią, z kombinatoryką i z teorią grup, ale i pod względem praktycznym, numerycznym, dotyczącym na przykład własności liczbowych danej macierzy i jej macierzy odwrotnej, oszacowania wyznacznika i kofaktorów macierzy itd. Wyrażając zatem konfigurację obwodu analitycznie za pomocą macierzy uogólnionych Z_{n+1} , Y_{n+1} , $\Gamma_{n+1, n+1}$ i $\Delta_{n+1, n+1}$ niezależnych od wyboru oczka odniesienia i węzła odniesienia, możemy własnościom liczbowym macierzy nadać interpretację elektryczną i z góry określić własności typowego obwodu elektrycznego, któremu ta wybrana macierz może być przyporządkowana.

Zakład Teorii Łączności
IPPT - P A N

WYKAZ LITERATURY

1. Antoniu I.S.: *Introducere in aplicarea calculului matricial la studiul circuitelor electrice*. Academia Republicii Populare Romane, Bucuresti, 1955.
2. Cemus J., Hamata M.: *Struktura modelu sítěvce z dvojpólu*. (Aus Zweipolen zusammengesetzte Wechselstrommodelle). Prace ustawa pro elektrotechniku, Ceskoslovenska Akademie Ved, Praha, 1956.
3. Cholewicki T.: *Metody odczkowe i węzłowe w macierzach składowych symetrycznych*. Arch. Elektr., s. 3, 1955.
4. Cholewicki T.: *Macierze i analiza obwodów liniowych*. Monografie Zagadnień Elektrotechniki Teoretycznej, PAN, Warszawa-Wrocław, 1956.
5. Le Corbeiller P.: *Matrix analysis of electric networks*. New York, 1960.
6. Foster R.M.: *Geometrical circuits of electrical networks*. Transactions AIEE, Vol. 51, 1932.
7. Le Page W., Seely S.: *General network analysis*. New York, 1952.
8. Promberger M.: *Použití matice a tenzoru v theoretické elektrotechnice*. Praha, 1955.
9. Taft W.A.: *Osnovy teorii i analiza lineinykh elektricheskikh setej po zadannym ich sostavnomu charakteristkam*. Wydawnictwo Akademii Nauk ZSRR, Moskwa, 1954.
10. Definitions of terms in network topology. PIRE, 1, 1951.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Резюме

Электрическую цепь обыкновенно представляют при помощи электрической схемы, в которой активные и пассивные ветви обозначены условными графическими символами или при помощи геометрической схемы, отражающей только конфигурацию цепи, а именно узлы при помощи точек и ветви при помощи прямых линий.

В последнее время некоторые авторы обозначают электрические цепи другим способом, а именно аналитически, выражая конфигурацию цепи при помощи импедансной или адмитансной матрицы. Надлежащий выбор этих матриц позволяет также соответственно классифицировать электрические цепи, основываясь на некоторых свойствах этих матриц.

В настоящей статье обобщается тема относящаяся к аналитическому определению и к классификации электрических цепей. Является также возможным провести некоторый синтез, т. е. построить цепь импедансная, адмитансная или соединительная матрица которой известна и притом имеет специальные, заранее определённые свойства.

Для решения электрических цепей применяются вообще методы контурных токов или узловых потенциалов. Относительно этих цепей предполагаем, что они являются типичными, т. е. не имеют связей, не разделены на части, гальванически соединенные и удовлетворяют другим условиям данным авторами [4], [7], [9].

Сравнивая две типичные цепи: одну контурную, состоящую $n+1$ контуров на примкнутой плоскости Гаусса, из которых n контуров являются линейно независимыми, а один — является опорным контуром, и вторую — узловую, состоящую из $n+1$ узлов, из которых n узлов являются линейно независимыми, а один узел — является опорным узлом.

Цепи эти соответственно характеризуются двумя симметричными матрицами: обобщенной импедансной матрицей Z'_{n+1} , и обобщенной адмитансной матрицей Y'_{n+1} , из которых каждая является матрицей $(n+1)$ -ого порядка и ранга n . Выбору k -того опорного контура и k -того опорного узла соответствует вычеркнутая k -тая строка и вычеркнутый k -тый столбец в обобщенной матрице.

Таким образом переходим к матрицам Z'_{nk} и Y'_{nk} n -того порядка и n -того ранга; эти матрицы зависят от индекса k вычеркнутой строки и вычеркнутого столбца. Является возможным установить некоторые двойственные зависимости [4], между матрицами Z'_{n+1} и Y'_{n+1} , а также между матрицами Z'_{nk} и Y'_{nk} .

Перейдем теперь к классификации цепей по числу контуров на примкнутой плоскости. В случае $n+1=4$, четырехконтурные цепи могут быть либо типа мостика, либо типа цепной схемы, рис. 2 и 3. Для случая мостика матрица Z'_4 состоит исключительно из не-нулевых элементов, а для случая цепной схемы матрица Z'_4 заключает 2 нулевых элемента, что равнозначно тому, что на схеме цепи 2 очка не имеют общей ветви.

Итак мы видим, что при $n+1=4$ число цепей с различной конфигурацией составляет $K=2$, число нулевых элементов обобщенной матрицы Z'_4 составляет $N=0$ или $N=2$.

В случае $n+1=5$ мы имеем дело с 5-контурными цепями на примкнутой плоскости, т. е. с цепями состоящими из 4 линейно независимых контуров и одного опорного контура. Обобщая соображения, встречаемые в литературе

по этому вопросу [2], доказываем, что в этом случае $K=7$ и $N=2, 4, 6$ или 8, рис. 4 до 10. Каждая из 7 родов цепей характеризуется аналитически матрицей Z'_n , в которой нулевые элементы появляются в числе N и занимают определенное положение, симметричное по отношению к главной диагонали.

Исследование чисел K и N для $n+1 > 5$ является геометрической задачей из области математики и требует применения методов и умозаключений, принятых в топологии.

Является возможным провести подобную классификацию цепей по числу $n+1$ узлов цепи. Можем также рассматривать класс цепей, состоящих из цепных схем, в котором число N нулевых элементов, а также положение в матрице Z'_{n+1} подчинены особым законам.

Во второй части статьи обобщаем соединительные матрицы C и A дополняя их прибавлением столбца, соответствующего опорному контуру или опорному узлу.

Прежде всего доказываем, что известные формулы $I=CI'$; $U=AU'$; $Z'=C_z ZC$ и $Y'=A_y A$ могут быть получены простым геометрическим образом, алгебраизируя зависимости между ветвями, контурами и узлами [4]. Согласно основам этой алгебраизации считаем ветвь алгебраической суммой примыкающих к ней контуров (включая в число контуров также и опорный контур), и затем альтернативно рассматриваем ветвь как алгебраическую сумму ее узлов, принимая также во внимание и опорный узел. Таким образом вместо соединительных матриц C размера $m \times n$, а также матриц A размера $m \times p$, где m обозначает число ветвей, $n+1$ число контуров и $p+1$ — число узлов, исследуем обобщенные матрицы $(\Gamma_{n+1}, m)_i$ и $(\Delta_{p+1}, n)_i$ независимые от выбора опорного контура и узла.

Формула $C_z A = 0$ может быть экстраполирована на обобщенные матрицы, удовлетворяющие зависимости $(\Gamma_{n+1}, m)_i (\Delta_{p+1}, n)_i = 0$, т. е. являющиеся делителями нулевой матрицы.

В заключении констатируем, что конфигурация типичной цепи может быть аналитически выражена обобщенными матрицами Z'_{n+1} , Y'_{p+1} , $(\Gamma_{n+1}, m)_i$, $(\Delta_{p+1}, n)_i$ независимыми от выбора опорного контура и узла. Определенным свойствам этих цепей соответствуют алгебраические свойства названных матриц, как число и положение нулевых элементов, порядок или размер матрицы, и т. п.

ANALYTICAL DETERMINATION OF THE CONFIGURATION OF AN ELECTRIC CIRCUIT

Summary

An electric circuit is usually illustrated either by means of an electric diagram, in which conventional graphical symbols denote all active and passive elements, or by means of a geometric diagram, which expresses the configuration of the circuit only, in particular the nodes represented by points and branches by straight lines.

Lately some authors determine electric circuits in another manner, namely analytically, expressing the configuration with the aid of an impedance or admittance matrix. The proper choice of those matrices can also enable the classification of electric circuits based on some properties of the matrices.

In the present paper we generalize the topic concerning the analytical determination and classification of electric circuits. It exists also a possibility of some circuit synthesis, i. e. it is possible to build a circuit whose impedance matrix, admittance matrix or connection matrix is known and possesses special properties given in advance.

Generally we solve electric circuits by using the mesh or the node-pair methods; those circuits are assumed to be typical, i. e. having no couplings, not divided into sub-circuits, and fulfilling other conditions mentioned by some authors [4], [7], [9].

A comparison is made between two typical circuits: one of which is composed of $n+1$ closed contours (meshes) on the Gaussian plane, i. e. having n contours linearly independent and 1 reference contour and the other one of $n+1$ nodes, from which n nodes are linearly independent and 1 node is called the reference node.

Those circuits are characterised by two symmetrical matrices respectively: the generalized impedance matrix $\mathbf{Z}'_{n+1}$ and the generalized admittance matrix $\mathbf{Y}'_{n+1}$, each of them being of order $n+1$, of rank n . The choice of the k -th reference mesh and of the k -th reference node corresponds to the cancellation of the k -th row and of the k -th column in the generalized matrix. We pass thus to the matrices $\mathbf{Z}'_{nk}$ and $\mathbf{Y}'_{nk}$, which are of order n and of rank n ; they depend on the index k of the cancelled row and column. Some dual relationships [4], between the matrices $\mathbf{Z}'_{n+1}$ and $\mathbf{Y}'_{n+1}$ as well as between the matrices $\mathbf{Z}'_{nk}$ and $\mathbf{Y}'_{nk}$ may be established.

The circuits can be classified according to their number of meshes on the Gaussian plane. We see that in the case of $n+1=4$ the circuits composed of 4 meshes can be either of the bridge-type or chain-connected meshes, fig. 2 and 3. In the case of the bridge the $\mathbf{Z}'_4$ matrix is composed of non-zero elements only and in the other case two elements of the $\mathbf{Z}'_4$ matrix are zero elements, what denotes that in the diagram of the circuit two meshes have no common branch. We see thus, in the case of $n+1=4$ the number of circuits having a different configuration amounts to $K=2$ and the number of zero elements in the generalized matrix $\mathbf{Z}'_4$ is equal to $N=0$ or 2.

In the instance of $n+1=5$ we deal with circuits composed of 5 meshes on the Gaussian plane, i. e. having 4 meshes linearly independent and 1 reference mesh, arbitrarily chosen. Generalizing the considerations found in other papers [2], we may prove that in this case we have $K=7$ and $N=2, 4, 6$ or 8 figs. 4 to 10. Each of the 7 types of circuits is analytically characterised by a $\mathbf{Z}'_5$ matrix with the corresponding number N of zero elements occupying a definite position, symmetrically to the principal diagonal of the matrix.

The study of numbers K and N for $n+1$ exceeding 5 is geometrical problem and can be performed in mathematics by topological methods.

An analogical classification of circuits may be done according to the number $n+1$ of nodes in the circuit. We may also consider the circuits formed by chain-connected meshes as forming a class, in which the number N of zero elements and their position in the matrix follow special rules.

In the second part of the paper we generalize the well known connection matrices $\mathbf{C}$ and $\mathbf{A}$, completing them by adding a column corresponding to the reference mesh or to the reference node. At first we prove that the well known formulae $\mathbf{I}=\mathbf{C}\mathbf{I}'$, $\mathbf{U}=\mathbf{A}\mathbf{U}'$, $\mathbf{Z}'=\mathbf{C}_c\mathbf{Z}\mathbf{C}$ and $\mathbf{Y}'=\mathbf{A}_c\mathbf{Y}\mathbf{A}$ may be obtained in a simple, purely geometrical manner, according to the rules of algebra between branches

meshes and nodes [4]. Following this algebraization we assume the branches as being the algebraic sums of all adjacent closed contours (meshes) taking into account also the reference mesh, and we consider then alternately the branches as being the algebraic sums of their terminals (nodes) taking under consideration also the reference node. Instead of the connection matrices $\mathbf{C}$ of order $m \times n$ and $\mathbf{A}$ of order $m \times p$, where

m = number of branches,
 $n+1$ = „ „ meshes,
 $p+1$ = „ „ nodes,

we investigate the generalized matrices $(\Gamma_{n+1, m})_t$ and $(\Delta_{p+1, m})_t$ which are independent of the choice of the reference mesh or node.

The formula $\mathbf{C}_t \mathbf{A} = \mathbf{0}$ can be extended on the generalized matrices satisfying the relation $\Gamma_{n+1, m} (\Delta_{p+1, m})_t = \mathbf{0}$, i. e. being also divisors of the zero matrix.

The conclusion of the paper is, the configuration of a typical circuit can be expressed analytically by generalized matrices $\mathbf{Z}'_{n+1}$, $\mathbf{Y}'_{p+1}$, $(\Gamma_{n+1, m})_t$, $(\Delta_{p+1, m})_t$, which are independent from the choice of the reference mesh or node. The definite features of the considered circuits find their reciprocal in algebraic properties of those matrices, like number of zero elements, their position, order of the matrix, etc.

621.314.21:621.316.42.001.2

P. CIECHANOWICZ

Nowy sposób obliczania napięć cewkowych oparty na falowym przedstawieniu drgań potencjałów wewnątrz uzwojenia transformatora z uwzględnieniem fal odbitych

Rękopis dostarczono 3. 2. 1958

W pracy korzystano z rozkładu potencjałów wzdłuż uzwojenia transformatora $u(x, t)$, wywołanym prostokątną falą udarową. Różnicę potencjałów $g(x, t)$ na dowolnym przedziale uzwojenia D , wzięto jako

$$g(x, t) = u(x, t) - u(x + D, t),$$

rozpatrując tę różnicę w formie falowej przy uwzględnieniu fal odbitych od obu końców uzwojenia. W tej metodzie nierozzerwalnie związano się z rozkładem potencjałów w chwili początkowej i końcowej. Otrzymano wyrażenia obliczeniowe dla uzwojeń transformatora z punktem zerowym uziemionym i izolowanym.

1. WSTĘP

Rozkład potencjałów wzdłuż uzwojenia jednorodnego w transformatorze, otrzymany po rozwiązaniu równań różniczkowych i całkowych według A. W. Karasiewa [6], da się przedstawić dla uzwojenia z punktem zerowym uziemionym następującą funkcją.

$$u(x, t) = u_0(x) + \sum_1^{\infty} U_{kp} \cos \frac{k\pi}{l} v_k t \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (1)$$

gdzie

$$u_0(x) = \frac{S(x)}{S(l)} U_0 \quad (2)$$

jest osią drgań potencjałów

$$U_{kp} = - \frac{2\alpha^2 l^2}{k\pi [\alpha^2 l^2 + k^2 \pi^2]} U_0 \quad (3)$$

amplituda harmoniczných

$$v_k = \frac{1}{\omega_0 P} \sqrt{\frac{N_k}{M_k}} \quad (4)$$

prędkością fazową harmoniczných.

Dalsze wielkości występujące w równaniach (2), (3) i (4) są

$$S(x) = \int_0^x \int_0^l m_0(x, y) dx dy, \quad (5)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{c_{1z}}{c_{1w}}}, \quad (6)$$

gdzie

l — długość poosiowa uzwojenia,

w_0 — liczba zwojów przypadająca na jednostkę długości uzwojenia

P — długość zwoju.

N_k i M_k są współczynnikami rozwiniętych w szereg Fouriera funkcji sprzężeń elektrostatycznych $n_0(z)$ i sprzężeń magnetycznych $m_0(z)$.

Gdy zachodzi proporcjonalność między funkcjami $n_0(z)$ i $m_0(z)$ wówczas dla wszystkich harmoniczych

$$\frac{N_k}{M_k} = \text{const}, \quad (7)$$

$$V_k = V = \text{const}. \quad (8)$$

Oś drgań ujęta równaniem (2) dla większości transformatorów może być aproksymowana do równania linii prostej.

$$u_0(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) U_0, \quad (9)$$

gdzie U_0 jest amplitudą udarowej prostokątnej fali napięcia.

Równanie (9) można interpretować jako równomierny rozkład napięć wzdłuż uzwojenia. Drugi człon z równania (1) przedstawia zmianę potencjałów wewnątrz uzwojenia wokół osi drgań.

Ten sam człon drgań potencjałów wewnątrz uzwojenia przy spełnionym warunku (7) i (8) można przedstawić w postaci falowej z jednakowymi prędkościami fazowymi dla wszystkich harmoniczych.

Dla uzwojenia z punktem zerowym izolowanym mamy

$$u(x, t) = U_0 + \sum_1^{\infty} U'_k \cos \frac{k\pi}{2l} v'_k t \cos \frac{k\pi}{2l} x, \quad (10)$$

gdzie

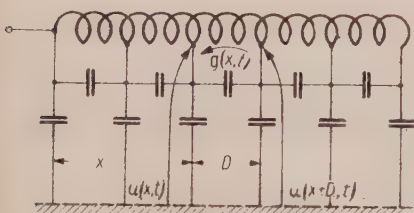
$$v'_k = \frac{1}{w_0 P} \sqrt{\frac{\bar{N}'_k}{M_k}}, \quad (11)$$

$$M'_k = \frac{1}{2l} \int_{-2l}^{+2l} M(z) \cos \frac{k\pi}{2l} z dz, \quad (12)$$

$$N'_k = \frac{1}{2l} \int_{-2l}^{+2l} n_0(z) \cos \frac{k\pi}{2l} z dz. \quad (13)$$

2. WYRAŻENIA OGÓLNE NA NAPIĘCIE CEWKOWE DLA TRANSFORMATORA Z PUNKTEM ZEROWYM UZWOJENIA UZIEMIIONYM

Napięcie cewkowe na dowolnym przedziale D uzwojenia transformatora można otrzymać jako różnicę wartości potencjału dla $t = \text{const}$ i współrzędnych osiowych uzwojenia x i $x + D$ (rys. 1).



Rys. 1. Schemat zastępczy uzwojenia transformatora, poddanego działaniu fali uderowej napięcia.

$$g_D(x, t) = u(x, t) - u(x + D, t). \quad (14)$$

Podstawiając na potencjał $u(x, t)$ wyrażenie (1) otrzymamy

$$g_D(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) U_0 - \left(1 - \frac{x + D}{l}\right) U_0 +$$

$$\sum_1^{\infty} U_{kp} \cos \frac{k\pi}{l} v_k t \sin \frac{k\pi}{l} x -$$

$$- \sum_1^{\infty} U_{kp} \cos \frac{k\pi}{l} v_k t \sin \frac{k\pi}{l} (x + D). \quad (15)$$

Pisząc wyrażenia stojące pod znakiem sum w równaniu (15) w postaci falowej, otrzymujemy

$$g_D(x, t) = \frac{D}{l} U_0 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} U_{kp} \sin \frac{k\pi}{l} (x - vt) + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} U_{kp} \sin \frac{k\pi}{l} (x + vt) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} U_{kp} \sin \frac{k\pi}{l} [(x + D) - vt] - \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} U_{kp} \sin \frac{k\pi}{l} [(x + D) + vt].$$

Wprowadzając skrócone oznaczenia fal stojących pod znakiem sumy po kolei przez

$$u_{\varphi 1}(x, t), u_{\varphi 2}(x, t), u_{\varphi 1}(x + D, t) \text{ i } u_{\varphi 2}(x + D, t),$$

ostatecznie mamy

$$g_D(x, t) = \frac{D}{l} U_0 + [u_{\varphi 1}(x, t) - u_{\varphi 1}(x + D, t)] + [u_{\varphi 2}(x, t) - u_{\varphi 2}(x + D, t)]. \quad (16)$$

Równanie (16) wskazuje, z jakich członów składa się napięcie cewkowe rozpatrywane na dowolnym przedziale D .

1. $\frac{D}{l} U_0$ — człon napięcia cewkowego pochodzący z równomiernego rozkładu potencjałów,
2. $[u_{\varphi 1}(x, t) - u_{\varphi 1}(x + D, t)]$ — człon napięcia cewkowego pochodzący od fali biegnącej w głąb uzwojenia wziętego jako różnica rzędnych tej fali dla $t = \text{const}$ i odciętych x i $x + D$,
3. $[u_{\varphi 2}(x, t) - u_{\varphi 2}(x + D, t)]$ — analogiczny człon jak z poz. 2, lecz odnoszący się do fali biegnącej w kierunku przeciwnym do biegu fali $u_{\varphi 1}$.

3. RÓWNANIA FAL $u_{\varphi 1}$ i $u_{\varphi 2}$ I ICH ODBIĆ OD OBU KOŃCÓW UZWOJENIA $u_{\varphi 1r}$ i $u_{\varphi 2r}$

Równania fal $u_{\varphi 1}$ i $u_{\varphi 2}$ wyznaczamy dla $t = 0$, korzystając ze znanej funkcji na rozkład potencjałów w chwili początkowej, wywołanych falą udarową prostokątną o amplitudzie $U_0 = 1$.

Dla transformatora z punktem zerowym uziemionym jest

$$u(x, 0) = \frac{\sin h\alpha(l-x)}{\sin h\alpha l}. \quad (17)$$

Zakładając $t = 0$ w równaniu (1) i biorąc pod uwagę falowy charakter drgań potencjałów wewnątrz uzwojenia otrzymamy

$$u_{\varphi 1}(x, 0) = u_{\varphi 2}(x, 0) = \frac{1}{2} [u(x, 0) - u_{\Omega}(x)], \quad (18)$$

a po podstawieniu $u(x, 0)$ i $u_{\Omega}(x)$

$$u_{\varphi 1}(x, 0) = u_{\varphi 2}(x, 0) = \frac{e^{\alpha(l-x)}}{4 \sin h\alpha l} - \frac{e^{-\alpha(l-x)}}{4 \sin h\alpha l} + \frac{1}{2} \frac{x}{l} - \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Równanie falowe dla dowolnej chwili t na podstawie (19) będzie

$$u_{\varphi 1}(x, t) = u_1 e^{-\alpha(x-vt)} - u_2 e^{\alpha(x-vt)} + u_3(x-vt) - u_4, \quad (20)$$

$$u_{\varphi 2}(x, t) = u_1 e^{-\alpha(x+vt)} - u_2 e^{\alpha(x+vt)} + u_3(x+vt) - u_4, \quad (21)$$

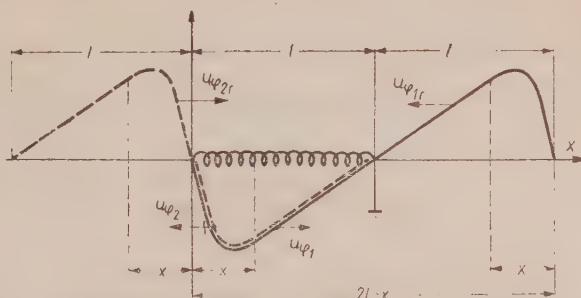
gdzie

$$u_1 = \frac{e^{\alpha l}}{4 \sin h\alpha l},$$

$$u_2 = \frac{e^{-\alpha l}}{4 \sin h\alpha l},$$

$$u_3 = \frac{1}{2} l; \quad u_4 = \frac{1}{2}.$$

Położenie fal głównych $u_{\varphi 1}$ i $u_{\varphi 2}$ i odbitych $u_{\varphi 1r}$ i $u_{\varphi 2r}$ dla $t=0$ przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Położenie fal głównych potencjałów uzwojenia $u_{\varphi 1}$ i $u_{\varphi 2}$ oraz ich odbić $u_{\varphi 1r}$ i $u_{\varphi 2r}$ dla chwili $t=0$. Punkt zerowy uzwojenia uziemiony.

Odbicie $u_{\varphi 2}$ od początku uzwojenia i $u_{\varphi 1}$ od końca uzwojenia otrzymuje się jak dla punktów zwarcia w linii (odbita fala ma odwrotny znak i kierunek ruchu). Zgodnie z powyższym mamy

$$u_{\varphi 2}(x, 0) = -u_{\varphi 2r}(-x, 0), \quad (22)$$

$$u_{\varphi 1}(x, 0) = -u_{\varphi 1r}(2l - x, 0). \quad (23)$$

Z równań (22) i (23), mając na uwadze (19), (20) i (21) można otrzymać

$$u_{\varphi 2r}(x, t) = -u_1 e^{\alpha(x-vt)} + u_2 e^{-\alpha(x-vt)} + u_3(x-vt) + u_4 \dots \quad (24)$$

$$u_{\varphi 1r}(x, t) = -u_1 e^{-\alpha[2l-(x+vt)]} + u_2 e^{\alpha[2l-(x+vt)]} + u_3(x+vt) + u_4 \dots \quad (25)$$

4. OBLICZANIE NAPIĘĆ CEWKOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM WSZYSTKICH FAL $u_{\varphi 1}$, $u_{\varphi 2}$, $u_{\varphi 1r}$ i $u_{\varphi 2r}$

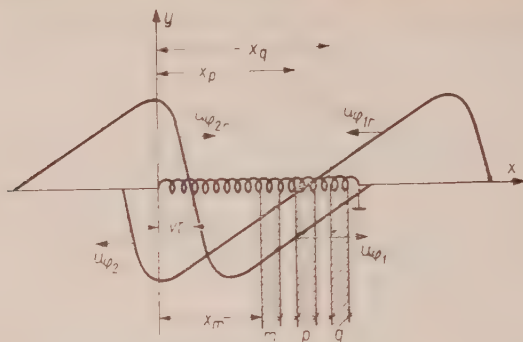
Obliczanie napięć cewkowych przeprowadzamy w trzech interwałach czasowych dla dowolnego przedziału D o odciętej x na podstawie równania (16).

$$\text{I Interwał dla } 0 \leq t \leq \frac{x}{v}. \quad (26)$$

$$\text{II Interwał dla } \frac{x}{v} \leq t \leq \frac{x+D}{v}. \quad (27)$$

$$\text{III Interwał dla } t \geq \frac{x+D}{v}. \quad (28)$$

Ze względu na położenie fal głównych $u_{\varphi 1}$ i $u_{\varphi 2}$ oraz odbitych $u_{\varphi 1r}$ i $u_{\varphi 2r}$ dla dowolnie obranego przedziału D o współrzędnej x , mogą wy-



Rys. 3. Położenie fal głównych potencjałów uzwojenia $u_{\varphi 1}$ i $u_{\varphi 2}$ oraz ich odbić $u_{\varphi 1r}$ i $u_{\varphi 2r}$ dla dowolnej chwili czasu t ($0 < t < \frac{t}{v}$). Punkt zerowy uzwojenia — uziemiony.

stąpić trzy obszary (m), (p), (q), w których napięcie cewkowe wyrazi się inną kombinacją fal (rys. 3).

Interwał I

Na podstawie równania (16) i przy uwzględnieniu przedziału D położonego w obszarze (m) bądź (p), bądź (q) można wypisać wyrażenia na napięcie cewkowe w pierwszym interwale (rys. 3).

$$g_{n1}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{\varphi 1}(x, t) - u_{\varphi 1}(x + D, t)] + [u_{\varphi 2}(x, t) - u_{\varphi 2}(x + D, t)], \quad (29)$$

$$g_{n1}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{\varphi 1}(x, t) - u_{\varphi 1}(x + D, t)] + [u_{\varphi 2}(x, t) - u_{\varphi 2}(l - vt, t)] + [u_{\varphi 1r}(l - vt, t) - u_{\varphi 1r}(x + D, t)], \quad (30)$$

$$g_{n1}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{\varphi 1}(x, t) - u_{\varphi 1}(x + D, t)] + [u_{\varphi 1r}(x, t) - u_{\varphi 1r}(x + D, t)]. \quad (31)$$

Po podstawieniu funkcji falowych i wykonaniu obliczeń wynika równość

$$g_{n1}(x, t) = g_{n1}(x, t) = g_{n1}(x, t) = g_{n1}(x, t). \quad (32)$$

Zatem napięcie cewkowe w pierwszym interwale wynosi

$$g_{n1}(x, t) = \frac{1}{4 \sin h a l} (1 - e^{-aD}) (e^{a(l-x)} + e^{-a(l-(x+D))}) (e^{avt} + e^{-avt}). \quad (33)$$

Interwał II

W interwale drugim są możliwe również trzy obszary (m), (p), (q). Wyrażenia dla tych obszarów są następujące

$$g_{n2}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{q1}(vt, t) - u_{q1}(x + D, t)] + [u_{q2}(x, t) - u_{q2}(x + D, t)] + \\ + [u_{q2r}(x, t) - u_{q2r}(vt, t)] \quad (34)$$

$$g_{n2}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{p1}(vt, t) - u_{p1}(x + D, t)] + [u_{p2r}(x, t) - u_{p2r}(vt, t)] + \\ + [u_{p2}(x, t) - u_{p2}(l - vt, t)], \quad (35)$$

$$g_{n2}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{q1}(vt, t) - u_{q1}(x + D, t)] + [u_{q2r}(x, t) - u_{q2r}(vt, t)] + \\ + [u_{p1r}(x, t) - u_{p1r}(x + D, t)]. \quad (36)$$

Wszystkie trzy wyrażenia spod (34), (35) i (36) są sobie równe i po podstawieniu funkcji falowych i uporządkowaniu wynoszą

$$g_{n2}(x, t) = 1 - \frac{1}{4 \sin hal} [(e^{\alpha[l-(x+D)]} - e^{-\alpha[l-(x+D)]} - e^{-\alpha(l+x)} + e^{-\alpha(l-x)}) e^{avt} + \\ + (e^{\alpha(l+x)} - e^{\alpha(l-x)} + e^{\alpha[l-(x+D)]} - e^{-\alpha[l-(x+D)]}) e^{-avt}]. \quad (37)$$

Interwał III

W interwale trzecim dają się rozróżnić trzy obszary (m), (p) i (q); wyrażenia na napięcie cewkowe w formie ogólnej w tych obszarach wynoszą

$$g_{n3}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{p2}(x, t) - u_{p2}(x + D, t)] + [u_{p2r}(x, t) - u_{p2r}(x + D, t)], \quad (38)$$

$$g_{n3}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{q2r}(x, t) - u_{q2r}(x + D, t)] + [u_{q2}(x, t) - u_{q2}(l - vt, t)] + \\ + [u_{p1r}(l - vt, t) - u_{p1r}(x + D, t)], \quad (39)$$

$$g_{n3}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{q2r}(x, t) - u_{q2r}(x + D, t)] + [u_{p1r}(x, t) - u_{p1r}(x + D, t)]. \quad (40)$$

Powyższe wyrażenia spod (38), (39) i (40) są sobie równe i wynoszą

$$g_{n3}(x, t) = \frac{1}{4 \sin hal} (1 - e^{-\alpha D}) [(e^{-\alpha(l+x)} + e^{-\alpha[l-(x+D)]}) e^{avt} + \\ + (e^{\alpha[l+(x+D)]} + e^{\alpha(l-x)}) e^{-avt}]. \quad (41)$$

Wyprowadzone wyrażenia na napięcie cewkowe w trzech interwałach

$$g_{n1}(x, t), \quad g_{n2}(x, t) \quad \text{ i } \quad g_{n3}(x, t)$$

są ściśle. Uwzględniają one wpływ fal odbitych od obu końców uzwojeń jak i skończoną długość poosiową uzwojenia l .

5. WZORY UPROSZCZONE

Dla wartości $al \geq 5$ można poczynić pewne uproszczenia całkowicie dopuszczalne ze względów praktycznych, a mianowicie przyjmując

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{al}}{2 \sinh al} &\approx 1, \\ \frac{e^{-al}}{2 \sinh al} &\approx 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

otrzymamy uproszczone wyrażenia na $g_{n1}(x, t)$, $g_{n2}(x, t)$ i $g_{n3}(x, t)$:

$$g_{n1}(x, t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha D}) e^{-\alpha x} (e^{\alpha vt} + e^{-\alpha vt}), \quad (43)$$

$$g_{n2}(x, t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha(x+D)} e^{\alpha vt} - \frac{1}{2} [e^{\alpha x} - e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha D})] e^{-\alpha vt}, \quad (44)$$

$$g_{n3}(x, t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha D}) (e^{\alpha(x+D)} + e^{-\alpha x}) e^{-\alpha vt}. \quad (45)$$

Dyskusja równań (43), (44) i (45) będzie dalej przeprowadzona.

6. WYRAŻENIA OGÓLNE NA NAPIĘCIE CEWKOWE DLA TRANSFORMATORA Z PUNKTEM ZEROWYM UZWOJENIA IZOLOWANYM

Stosujemy tu te same oznaczenia jak na rys. 1 i korzystamy z podstawowej zależności (14). Po wprowadzeniu na potencjał $u(x, t)$ równanie (10) otrzymamy ogólne wyrażenie na napięcie cewkowe na dowolnym przedziale D uzwojenia jako

$$g_D(x, t) = [u_{\varphi 1i}(x, t) - u_{\varphi 1i}(x + D, t)] + [u_{\varphi 2i}(x, t) - u_{\varphi 2i}(x + D, t)]. \quad (46)$$

7. RÓWNANIA FAL $u_{\varphi 1i}$ i $u_{\varphi 2i}$ I ICH ODBIĆ OD OBU KOŃCÓW UZWOJENIA $u_{\varphi 1ir}$ i $u_{\varphi 2ir}$.

Dla transformatora z punktem zerowym uzwojenia izolowanym rozkład potencjałów wzdłuż uzwojenia dla chwili początkowej przedstawia zależność

$$u_i(x, 0) = \frac{\cosh \alpha(l-x)}{\cosh \alpha l} U_0, \quad (47)$$

gdzie $U_0 = 1$ — oznacza amplitudę udarowej fali prostokątnej.

Kładąc $t=0$ w równaniu (10) i biorąc pod uwagę falowy charakter

drgań potencjałów wewnątrz uzwojenia otrzymamy

$$u_{\varphi 1i}(x, 0) = u_{\varphi 2i}(x, 0) = \frac{1}{2} [u_i(x, 0) - 1], \quad (48)$$

a po podstawieniu wyrażenia (47) do (48)

$$u_{\varphi 1i}(x, 0) = u_{\varphi 2i}(x, 0) = \frac{1}{2} (k_1 e^{-\alpha l} e^{\alpha x} + k_1 e^{\alpha l} e^{-\alpha x} - 1). \quad (49)$$

Równanie falowe dla $u_{\varphi 1i}$ i $u_{\varphi 2i}$ otrzymamy na podstawie (49)

$$u_{\varphi 1i}(x, t) = \frac{1}{2} (k_1 e^{-\alpha l} e^{\alpha(x-vt)} + k_1 e^{\alpha l} e^{-\alpha(x-vt)} - 1), \quad (50)$$

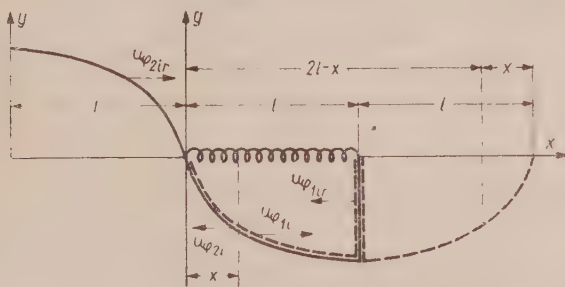
$$u_{\varphi 2i}(x, t) = \frac{1}{2} (k_1 e^{-\alpha l} e^{\alpha(x+vt)} + k_1 e^{\alpha l} e^{-\alpha(x+vt)} - 1), \quad (51)$$

gdzie

$$k_1 = \frac{1}{2 \cosh \alpha l}.$$

Położenie fal głównych $u_{\varphi 1i}$ i $u_{\varphi 2i}$ oraz odbitych $u_{\varphi 1ir}$ i $u_{\varphi 2ir}$ dla $t=0$ przedstawiono na rys. 4.

Odbicie $u_{\varphi 2i}$ od początku uzwojenia otrzymuje się jak dla punktu



Rys. 4. Położenie fal głównych potencjałów uzwojenia $u_{\varphi 1i}$ i $u_{\varphi 2i}$ oraz ich odbić $u_{\varphi 1ir}$ i $u_{\varphi 2ir}$ dla chwili $t=0$. Punkt zerowy uzwojenia — izolowany.

zwarcia w linii, odbicie zaś $u_{\varphi 1i}$ od końca uzwojenia transformatora — jak dla punktu z linią otwartą. Zgodnie z powyższym mamy

$$u_{\varphi 1ir}(2l-x, 0) = u_{\varphi 1i}(x, 0), \quad (52)$$

$$u_{\varphi 2ir}(-x, 0) = -u_{\varphi 2i}(x, 0). \quad (53)$$

Z równań (52) i (53) w oparciu o (50) i (51) można otrzymać

$$u_{\varphi 1ir}(x, t) = \frac{1}{2} (k_1 e^{-\alpha l} e^{\alpha[2l-(x+vt)]} + k_1 e^{\alpha l} e^{-\alpha[2l-(x+vt)]} - 1), \quad (54)$$

$$u_{\varphi 2ir}(x, t) = \frac{1}{2} (1 - k_1 e^{\alpha l} e^{\alpha(x-vt)} - k_1 e^{-\alpha l} e^{-\alpha(x-vt)}). \quad (55)$$

8. OBLICZANIE NAPIĘĆ CEWKOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM WSZYSTKICH FAL $u_{\varphi 1i}$, $u_{\varphi 2i}$, $u_{\varphi 1ir}$ i $u_{\varphi 2ir}$

Analogicznie jak przy obliczaniu napięć cewkowych w transformatorze z punktem zerowym uzwojenia zwartym do ziemi, zachowujemy te same oznaczenia interwałów czasowych (26), (27) i (28). Również są ważne i słuszne uwagi dotyczące obszarów oznaczonych literami (m), (p) i (q).

Napięcia cewkowe w tym samym interwale dla przypadku (m), (p) i (q) są sobie równe.

Otrzymane końcowe wyrażenia obliczeniowe na podstawie (46) oraz (50), (51) i (54), (55) są następujące:

Interwał I $0 \leq t \leq \frac{x}{V}$

$$g_{n1i}(x, t) = k_1 \{ \cos h a(l - x) - \cos h a[l - (x + D)] \} (e^{avt} + e^{-avt}). \quad (56)$$

Interwał II $\frac{x}{V} \leq t \leq \frac{x + D}{V}$

$$g_{n2i}(x, t) = 1 - k_1 \{ [\cos h a[l - (x + D)] - e^{-at} \sin h ax] e^{avt} + [\cos h a[l - (x + D)] + e^{at} \sin h ax] \cdot e^{-avt} \}. \quad (57)$$

Interwał III $\frac{x + D}{V} \leq t$

$$g_{n3i}(x, t) = \frac{1}{2} k_1 (1 - e^{-\alpha D}) \{ (e^{\alpha[l + (x + D)]} + e^{\alpha[l - x]}) e^{-\alpha vt} - (e^{-\alpha[l - (x + D)]} + e^{-\alpha[l + x]}) e^{avt} \}. \quad (58)$$

Wyrażenia (56), (57) i (58) są ściśle. Różnią się one od analogicznych wyrażeń (33), (37) i (41) otrzymanych dla uzwojenia transformatora z punktem zerowym uziemionym.

9. WZORY UPROSZCZONE

Jeżeli przyjąć założenia upraszczające analogiczne do (42), a mianowicie

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\alpha l}}{2 \cos h \alpha l} &\approx 1, \\ \frac{e^{-\alpha l}}{2 \cos h \alpha l} &\approx 0, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

to z równań (56), (57) i (58) otrzymamy wyrażenia obliczeniowe w trzech

interwałach czasowych identyczne z wyrażeniami (43), (44) i (45), czyli

$$\left. \begin{aligned} g_{n1}(x, t) &= g_{n1t}(x, t), \\ g_{n2}(x, t) &= g_{n2t}(x, t), \\ g_{n3}(x, t) &= g_{n3t}(x, t). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Należy zaznaczyć, że istotny sens fizyczny równań uproszczonych (60) polega na odpadnięciu fali odbitej od końca uzwojenia.

Taki wynik jest równoznaczny założeniu uzwojenia nieskończenie długiego, to jest takiego, jakim operował w swojej pracy E. S. Frid.

Chcąc dostosować obliczenia przy założonych uproszczeniach (42) i (59) do uzwojenia transformatora o skończonej długości l , należy korzystać z rozkładu początkowego potencjałów jak dla uzwojenia nieskończenie długiego, a odbite fale od końca u_{q1r} i u_{q2r} brać jak dla skończonej długości l . W tym przypadku łatwo można otrzymać równanie fali odbitej od końca uzwojenia w postaci

$$u_{q1r}(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2l - (x + vt)}{l} - e^{-\alpha[2l - (x + vt)]} \right\}. \quad (61)$$

Wpływ tej fali na wartość napięcia cewkowego na przedziale D we wszystkich interwałach wyniesie

$$g_{nr}(x, t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha D}) e^{-\alpha[2l - (x + D)]} e^{\alpha vt} - \frac{D}{2l}. \quad (62)$$

W większości przypadków stosunek $\frac{D}{2l}$ jest bardzo mały i wobec tego można go opuścić. Zatem

$$g_{nr}(x, t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha D}) e^{-\alpha[2l - (x + D)]} e^{\alpha vt}. \quad (63)$$

Wyrażenie (63) służy jako uzupełnienie do obliczeń napięć cewkowych za pomocą wzorów uproszczonych podanych w grupie równań (60). Wartość g_{nr} dla transformatora z zerem uziemionym dodajemy, a dla transformatora z zerem izolowanym odejmujemy od wartości podanych w grupie równań (60).

10. WYZNACZENIE WYRAŻEŃ NA WARTOŚĆ MAKSYMALNĄ NAPIĘCIA CEWKOWEGO W TRZECH INTERWAŁACH

Interwał I. Wyrażenie na napięcie cewkowe bierzemy z równania (33)

$$g_{n1}(x, t) = \frac{1 - e^{-\alpha D}}{4 \sinh \alpha l} \cdot k_{1\alpha} (e^{\alpha vt} + e^{-\alpha vt}), \quad (64)$$

gdzie

$$k_{1\alpha} = e^{\alpha(l-x)} + e^{-\alpha[l-(x+D)]},$$

Biorąc pochodną $\frac{dg_{n1}(x, t)}{dt}$ i przyrównując ją do zera, otrzymamy, że maksimum wypada dla $t_m = 0$. Zatem

$$g_{n1 \max}(x, 0) = \frac{1 - e^{-\alpha D}}{2 \sinh \alpha l} \cdot k_{1\alpha}. \quad (65)$$

Z warunku $t_m = 0$ wynika, że dla pierwszego interwału maksimum napięcia przypada tylko dla $x = 0$. Zatem po uporządkowaniu (65) mamy

$$g_{n1 \max}(0, 0) = \left(1 - \frac{\sinh \alpha(l-D)}{\sinh \alpha l}\right). \quad (66)$$

Interwał II. Wyrażenie na napięcie cewkowe w drugim interwale przedstawia równanie (37) jako

$$g_{n2}(x, t) = 1 - \frac{1}{4 \sinh \alpha l} (k_{2\alpha} e^{\alpha vt} + k_{-2\alpha} e^{-\alpha vt}),$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} k_{2\alpha} &= e^{\alpha[l-(x+D)]} - e^{-\alpha[l-(x+D)]} + e^{-\alpha(l-x)} - e^{-\alpha(l+x)}, \\ k_{-2\alpha} &= e^{\alpha(l+x)} - e^{\alpha(l-x)} + e^{\alpha[l-(x+D)]} - e^{-\alpha[l-(x+D)]}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Maksimum funkcji $g_{n2}(x, t)$ występuje dla

$$t_m = \frac{1}{2\alpha v} \ln \frac{k_{-2\alpha}}{k_{2\alpha}}, \quad (68)$$

zatem

$$g_{n2 \max}(x, t) = 1 - \frac{1}{2 \sinh \alpha l} \sqrt{k_{2\alpha} \cdot k_{-2\alpha}}. \quad (69)$$

Interwał III. Wyrażenie na napięcie cewkowe w trzecim interwale przedstawia wyrażenie (41)

$$g_{n3}(x, t) = \frac{1 - e^{-\alpha D}}{4 \sinh \alpha l} \{k_{3\alpha} e^{\alpha vt} + k_{-3\alpha} e^{-\alpha vt}\},$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} k_{3\alpha} &= e^{-\alpha(l-x)} + e^{-\alpha[l-(x+D)]}, \\ k_{-3\alpha} &= e^{\alpha[l+(x+D)]} + e^{(l-x)}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Przeprowadzając te same operacje jak dla interwału I i II otrzymamy

$$t_m = \frac{1}{2\alpha v} \ln \frac{k_{-3\alpha}}{k_{3\alpha}}, \quad (71)$$

$$g_{n3 \max}(x, t_m) = \frac{1 - e^{-\alpha D}}{2 \sinh \alpha l} \sqrt{k_{3\alpha} k_{-3\alpha}}. \quad (72)$$

Przy stosowaniu wzorów przybliżonych maksimum występuje w drugim interwale. Wyznaczone maksimum dla tego interwału wynosi

$$g_{n \max}(x) = 1 - \sqrt{e^{-\alpha D} [1 - (1 - e^{-\alpha D}) e^{-2\alpha x}]}. \quad (73)$$

We wzorach ścisłych na $g_n(x, t)$ jak i przybliżonych ciągłość funkcji $g_n(x, t)$ przy przejściu z jednego interwału do drugiego została sprawdzona.

11. PORÓWNANIE WYNIKÓW OBLICZEŃ DOKONANYCH WZORAMI ŚCISŁYMI I PRZYBLIŻONYMI

We wzorach tak ścisłych jak i przybliżonych z uwzględnieniem fali odbitej od końca uzwojenia występują pewne stałe parametry jak:

l — długość uzwojenia,

D — długość przedziału po osi uzwojenia,

αl — współczynnik bezwymiarowy, charakteryzujący początkowy rozkład potencjałów jak i oś drgań.

Maksymalne wartości napięć cewkowych przy działaniu fal bez uwzględnienia tłumienia układają się (na przykład dla transformatora z punktem zerowym uziemionym) symetrycznie względem środka po obu stronach połówek uzwojenia. Największe wartości przypadają na cewki początkowe i końcowe, najmniejsze zaś na cewki środkowe. Porównując wyniki obliczeń należy mieć na uwadze, że różnice między wartościami obliczonymi zależą od wielkości wziętego przedziału D i wartości charakterystycznego współczynnika αl . Im większy przedział D i mniejsza wartość αl , tym większe wystąpią różnice między wynikami obliczeń wzorami ścisłymi i przybliżonymi.

Wobec tego w niniejszej pracy ograniczono się do przypadków najmniej korzystnych, które w praktyce prawie nie występują, mianowicie za długość przedziału D wzięto $D=l$, a na αl wzięto dwie graniczne wartości dolne

$$\alpha l = 3 \quad \text{ i } \quad \alpha l = 5.$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymano różnicę względną wynoszącą w przypadku pierwszym — 2,6%, a w drugim — 0,34%.

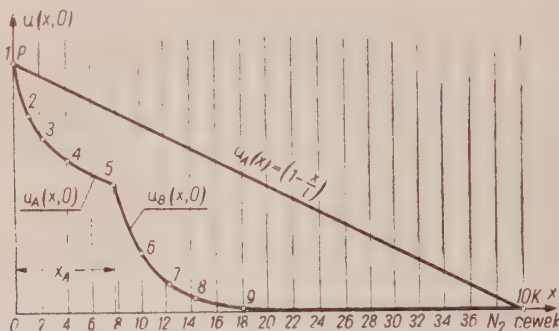
Wynik ten wskazuje, że do obliczeń wystarczą wzory przybliżone, które pasują do wszystkich transformatorów zarówno z zerem uziemionym, jak i izolowanym.

12. OBLICZANIE NAPIĘĆ CEWKOWYCH W TRANSFORMATORACH Z UZWOJENIEM NIEJEDNORODNYM

Teorię falową można również stosować do obliczania napięć w uzwojeniach niejednorodnych transformatora w postaci uproszczonej bez uwzględnienia odbić wewnętrznych.

U takich transformatorów pojemnościowy rozkład potencjałów wzdłuż uzwojenia dla chwili początkowej może przedstawiać pewna nieregularna krzywa PAK (rys. 5), przy czym punkt zerowy uzwojenia jest uziemiony.

Znajomość pojemności własnych cewek i pojemności do ziemi zawsze umożliwi odtworzenie rozkładu początkowego potencjałów. Rozkład ten



Rys. 5. Rozkład potencjałów uzwojenia w chwili początkowej (krzywa PAK). Punkt zerowy uzwojenia — uziemiony. (Transformator: 10000 kVA, 115,5 kV/3,15 kV; pomiary wzięte z Instytutu Elektrotechniki).

da się odtworzyć nie analitycznie jak dla uzwojeń jednorodnych, lecz tylko graficznie. Wobec tego dalszy bieg obliczeń napięć cewkowych ma charakter grafo-analityczny.

Wracając do rys. 5, oznaczamy odcinki krzywych PA i AK za pomocą $u_A(x, 0)$ i $u_B(x, 0)$. Jak wiadomo $u_D(x)$ oznacza równanie osi, względem której zachodzą drgania napięć wewnątrz uzwojenia transformatora w procesach poudarowych. Równanie to możemy aproksymować do linii prostej (patrz Karasiew [5] równanie I, 44, str. 28).

Na podstawie powyższych oznaczeń możemy napisać równanie fal napięcia dla $t=0$ w dwóch przedziałach

$$u_{\varphi 1A}(x, 0) = u_{\varphi 2A}(x, 0) = \frac{1}{2} [u_A(x, 0) - u_D(x)], \quad (74)$$

$$u_{\varphi 1B}(x, 0) = u_{\varphi 2B}(x, 0) = \frac{1}{2} [u_B(x, 0) - u_D(x)]. \quad (75)$$

Równania (74) i (75) dają możliwość otrzymania fal głównych i fal odbitych od obu końców uzwojenia. Fale powyższe dadzą się łatwo zamodelować chociażby z celofanu. Przesuwając modele-fale na tle papieru milimetrowego z jednakową prędkością oraz biorąc sumy różnic tych fal na dowolnym przedziale D i stosując równanie (16) lub (46) otrzymamy napięcie cewkowe na tym przedziale zmieniające się w funkcji czasu.

Wykonanie tak modeli fal, jak i mechanizmu poruszania tych fal w jednej płaszczyźnie nie przedstawia wielkich trudności. Posiadanie przebiegów napięć cewkowych w czasie szczególnie jest pożyteczne przy analizie iloczynów szczytowej wartości napięcia cewkowego razy czas trwania tego napięcia do pół szczytu dla tego samego przedziału D , lecz branego w różnych miejscach uzwojenia.

Przytoczony na rys. 5 pojemnościowy rozkład potencjałów odnosi się do transformatora 3-fazowego o mocy 10 000 kVA o przekładni 115/3,15 kV z uzwojeniem niejednorodnym. Powyższe dane zostały zapożyczone z Instytutu Elektrotechniki.

Obliczone napięcia cewkowe dla pierwszej cewki przy $t=0$ na podstawie rys. 5 i przy zastosowaniu równania (16) wyniosło

$$g_{n \max}(0, 0) = 0,21.$$

Zmierzona wartość w tym przedziale wyniosła $g_{n \max} = 0,2$. Różnica względna wyrażona w procentach wynosi

$$\frac{0,2 - 0,21}{0,2} \cdot 100\% = -5\%.$$

Jak widać, zbieżność wyników dla celów praktycznych jest zadowalająca.

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА КАТУШЕЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОСЛЕУДАРНЫХ ПРОЦЕССАХ ТРАНСФОРМАТОРА, ОСНОВАННЫЙ НА ВОЛНОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ПОТЕНЦИАЛОВ ВНУТРИ ТРАНСФОРМАТОРНОЙ ОБМОТКИ С УЧЕТОМ ОТРАЖЕННЫХ ВОЛН

Резюме

Новый способ расчета катушечных напряжений в послеударных процессах трансформатора состоит в непосредственном оперировании распределением потенциалов $u(x, t)$ вдоль обмотки, вызывающим прямоугольной ударной волной напряжения.

Катушечное напряжение на любом участке обмотки D получается в виде разницы значений функции $u(x, t)$ на этом участке а именно:

$$G_D(x, t) = u(x, t) - u(x + D, t).$$

При этом методе используется кроме того возможность представления в волновой форме члена функции $u(x, t)$, представляющего колебания потенциала внутри трансформаторной обмотки.

Определение воли изменения потенциалов внутри обмотки основано на использовании известного распределения потенциалов в начальном моменте времени, подиктованного, как известно, собственными ёмкостями обмоток трансформатора и ёмкостями обмоток трансформатора по отношению к земле.

Известные до сих пор способы расчета катушечных напряжений [3], [4]

были основаны на применении линейного интеграла напряженности электрического поля вдоль пути охватывающего участок D , т. е.

$$G_D(x, t) = \int_x^{x+D} k(x, t) dx$$

где $K(x, t)$ составляющая напряженности электрического поля. Она является градиентом действующим вдоль оси обмотки, а его связь с функцией $u(x, t)$ выражается известной зависимостью

$$K(x, t) = -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Разработанный метод отличается следующими преимуществами:

1. Вместо интегрирования производится алгебраическое вычитание с одновременным учетом отраженных волн.
2. Для реальных трансформаторов с неоднородной обмоткой вычисление напряжений производится просто на основании распределения потенциалов для первоначального момента без необходимости определения функции $K(x, t)$.
3. Весь процесс вычислений катушечных напряжений для любого участка D и для любого момента времени t в пределах $0 \leq t \leq \frac{l}{v}$ может быть представлен при помощи простых графических модельных преобразований сокращающих время расчета до минимума.
4. Для однородных трансформаторных обмоток даны кроме того упрощенные формулы вычислений с дополнительным учетом волны отраженной от конца обмотки.

NEW CALCULATION METHOD OF COIL VOLTAGES BASED UPON WAVE REPRESENTATION OF OSCILLATIONS OF POTENTIALS INSIDE TRANSFORMER WINDINGS TAKING INTO ACCOUNT THE REFLECTED WAVES

Summary

The new calculation method of coil voltages in the after-shock processes of the transformer consists in the direct handling with the resolution of the potentials $u(x, t)$ along the winding, evoked by the rectangular shock wave of the voltage.

The coil voltage in any region of the winding D may be obtained as the difference of function $u(x, t)$ values within this region i. e.

$$G_D(x, t) = u(x, t) - u(x + D, t).$$

In this method, thus, the advantage of representing of the function member $u(x, t)$ in the wave form, which correspond to the oscillation of the potential inside the transformer winding, is fully exploited.

The determination of the waves of the potential changes inside the winding is based upon the information as to the resolution of the potential at the initial instant, which as it is known, is the resolution governed by the self and ground capacitances of the transformer windings.

Up to the present known calculation method of the coil voltages [3], [4], were based upon the use of linear integral of electric field intensity along the way within region D i. e.

$$G_D(x, t) = \int_x^{x+D} K(x, t) dx,$$

where $K(x, t)$ denotes the component of the electric field intensity. This is a gradient operating along the winding axis and in relation to the function $u(x, t)$ is expressed by dependence

$$K(x, t) = - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

The suggested method has the following advantages.

1. Interpretation calculus is replaced by the algebraic subtraction, taking into account the reflected waves simultaneously.

2. For the transformers with non-homogeneous winding the voltage calculation is carried out directly on the basis of potential resolution of the initial instant without recourse to the determination of function $K(x, t)$.

3. Whole calculation procedure of the coil voltages within any region D and at any instant t within limits $0 \leq t \leq \frac{l}{v}$ may be carried out with the aid of very simple graphical operations reducing time-consuming calculation to the minimum. Moreover, the simplified formulae for the calculation of the homegenous transformer windings taking into account the wave reflected by the end of winding, are given.

621.318.42.001.2:621.3.027:517

P. CIECHANOWICZ

Interpretacja graficzno-fizyczna przebiegu napięć cewkowych

Rękopis dostarczono 3. 2. 1958

W pracy poddano analizie wyrażenia na napięcie cewkowe. Z rozważań teoretycznych otrzymano, że iloczyn maksymalnej wartości napięcia cewkowego przez czas trwania napięcia do pół szczytu, pozostaje stały dla wszystkich przedziałów uzwojenia o tej samej długości poosiowej D .

Następnie stwierdzono, że wartość tak chwilowa, jak i maksymalna napięcia cewkowego, nie zależy od prędkości fazowej rozchodzenia się fali wzdłuż uzwojenia. Natomiast prędkość fazowa ma wpływ na czas trwania maksimum napięcia na przedziale, co wiąże się z wpływem ośrodka, w którym znajduje się uzwojenie.

1. WSTĘP

Wyrażenie na napięcie cewkowe, to jest napięcie na dowolnym przedziale D uzwojenia, można wyrazić za pomocą fal gradientów $K(x, t)$ bądź też funkcją potencjałów wewnątrz uzwojenia $u(x, t)$. W pierwszym przypadku (dla fali udarowej prostokątnej) mamy

$$g_D(x, t) = \int_x^{x+D} K(x, t) dx. \quad (1)$$

W drugim przypadku to samo napięcie na przedziale D można wyrazić jako

$$g_D(x, t) = u(x, t) - u(x+D, t). \quad (2)$$

Należy stwierdzić, że sposób (2) jest znacznie wygodniejszy, a w zastosowaniu do transformatorów z uzwojeniem niejednorodnym, u których pojemnościowy początkowy rozkład potencjałów nie da się przedstawić za pomocą jednej funkcji ciągłej, jest sposobem bardzo praktycznym i najprostszym. Funkcja $g_D(x, t)$ składa się z trzech składowych części $g_{n1}(x, t)$, $g_{n2}(x, t)$ i $g_{n3}(x, t)$ odpowiadających trzem interwałom czasowym

$$0 \leq t \leq \frac{x}{v},$$

$$\frac{x}{v} \leq t \leq \frac{x+D}{v},$$

$$t \geq \frac{x+D}{v}.$$

Dla innych przebiegów fali udarowej napięcia, różniącej się w czasie od impulsu prostokątnego, otrzymujemy na tym samym przedziale uzwojenia napięcie cewkowe za pomocą całki Duhamela:

$$g_1(x, t)_i = u_i(0) g_{n1}(x, t) + \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=t} g_{n1}(x, t-\vartheta) u'_i(\vartheta) d\vartheta, \quad (3)$$

$$0 \leq t \leq \frac{x}{v}$$

$$g_2(x, t)_i = u_i(0) g_{n2}(x, t) + \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=t-\frac{x}{v}} g_{n2}(x, t-\vartheta) u'_i(\vartheta) d\vartheta + \int_{\vartheta=t-\frac{x}{v}}^{\vartheta=t} g_{n1}(x, t-\vartheta) u'_i(\vartheta) d\vartheta, \quad (4)$$

$$\frac{x}{v} \leq t \leq \frac{x+D}{v}$$

$$g_3(x, t)_i = u_i(0) g_{n3}(x, t) + \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=t-\frac{x+D}{v}} g_{n3}(x, t-\vartheta) u'_i(\vartheta) d\vartheta +$$

$$+ \int_{\vartheta=t-\frac{x+D}{v}}^{\vartheta=t-\frac{x}{v}} g_{n2}(x, t-\vartheta) u'_i(\vartheta) d\vartheta + \int_{\vartheta=t-\frac{x}{v}}^{\vartheta=t} g_{n1}(x, t-\vartheta) u'_i(\vartheta) d\vartheta. \quad (5)$$

Tutaj $u_i(t)$ jest nową falą udarową napięcia.

W niniejszej pracy rozpatrzono następujące fale udarowe napięcia

$$\text{I} \quad u_i(t) = U_0 = 1, \quad (6)$$

$$\text{II} \quad u_i(t) = 1 - e^{-\rho t}, \quad (7)$$

$$\text{III} \quad u_i(t) = A_m(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), \quad (8)$$

$$\text{IV} \quad u_i(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos \omega t) \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega},$$

$$u_i(t) = 1 \quad \text{dla} \quad t \geq \frac{\pi}{\omega}. \quad (9)$$

2. INTERPRETACJA GRAFICZNA I FIZYCZNA NAPIĘĆ CEWKOWYCH

Położenie fal gradientów na uzwojeniu jednorodnym transformatora dla dowolnej chwili $0 \leq t \leq \frac{l}{v}$ przedstawiono na rys. 1. Analogiczne położenie fal zmian potencjałów wewnątrz uzwojenia przedstawiono na rys. 1a.

Na podstawie równania (1) i rys. 1 napięcie cewkowe na przedziale D

(położenie przedziału D odpowiada pierwszemu interwałowi) można wyrazić przez

$$g_{n1}(x, t) = \int_x^{x+D} K_1(x, t) dx + \int_x^{x+D} K_2(x, t) dx + \int_x^{x+D} K_{1r}(x, t) dx \quad (10)$$

$$0 \leq t \leq \frac{x}{v}$$

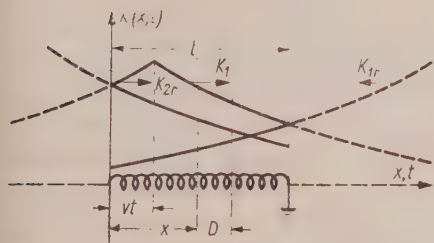
oraz na podstawie równania (2) i rys. 1a to samo napięcie na przedziale D da się wyrazić jako

$$g_{n1}(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{\varphi_1}(x, t) - u_{\varphi_1}(x+D, t)] +$$

$$+ [u_{\varphi_2}(x, t) - u_{\varphi_2}(x+D, t)] +$$

$$+ [u_{\varphi_{1r}}(x, t) - u_{\varphi_{1r}}(x+D, t)] +$$

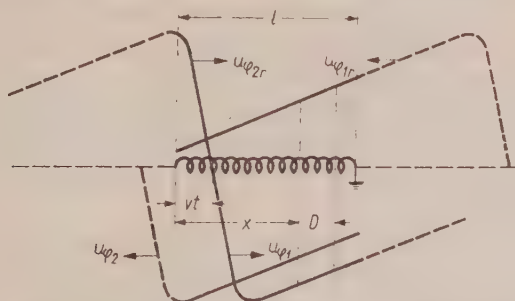
$$+ [u_{\varphi_{2r}}(x, t) - u_{\varphi_{2r}}(x+D, t)]. \quad (11)$$



Rys. 1. Położenie fal głównych gradientów K_1 i K_2 oraz ich odbić K_{1r} i K_{2r} dla dowolnej chwili czasu t ($0 < t < \frac{l}{v}$).

W wyrażeniu (10) całkowanie przeprowadzamy względem x w granicach od x do $x+D$ przy $t = \text{const}$, to jest chwili t , dla której położenie fal będących w ruchu podaje rys. 1. Wobec tego wartość całki dla $x = x_1$ i $t = t_1$ przedstawia sumę pól zakreskowanych zawartych

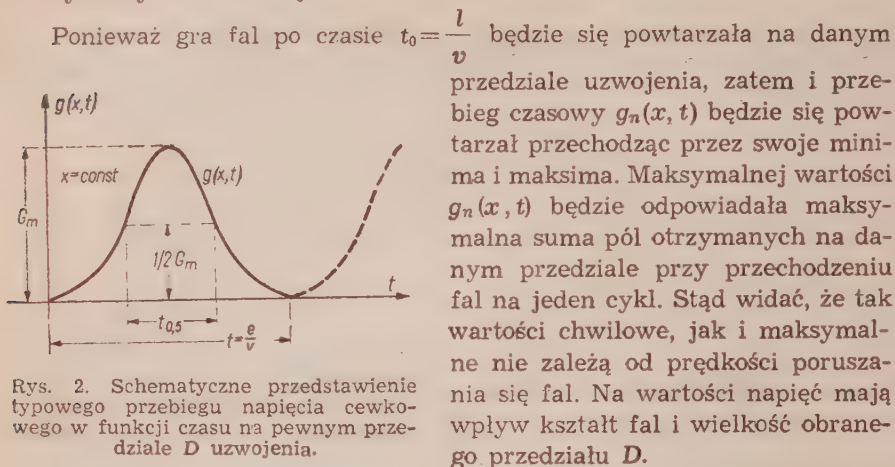
między odcinkami fal a osią x . Wartość ta odpowiada wartości chwilowej napięcia cewkowego na przedziale D dla chwili $t = t_1$. Następne wartości



Rys. 1a. Położenie fal głównych potencjałów uzwojenia u_{φ_1} i u_{φ_2} oraz ich odbić $u_{\varphi_{1r}}$ i $u_{\varphi_{2r}}$ dla dowolnej chwili czasu t ($0 < t < \frac{l}{v}$).

chwilowe napięcia cewkowego będą odpowiadały sumie pól zawartych między odcinkami fal, a osią x w nowym ich położeniu.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić przy rozpatrywaniu wyrażenia (11). Tu tylko zamiast sumowania pól będziemy mieli do czynienia z sumowaniem różnic rzędnych fal na obranym przedziale D . Otrzymamy taki sam wynik.



Rys. 2. Schematyczne przedstawienie typowego przebiegu napięcia cewkowego w funkcji czasu na pewnym przedziale D uzwojenia.

Mając powyższe na uwadze, przebieg $g_n(x, t)$ w czasie można przedstawić w sposób pokazany na rys. 2.

Położenie G_m (rys. 2), jak i jego bezwzględna wartość w stosunku do $t_0 = \frac{l}{v}$ jako podstawy, jest zależne od współrzędnej x obranego przedziału D . Przy zmianie prędkości v i jednocześnie zmianie skali dla osi czasu, przebieg $g_n(x, t)$ nie ulegnie zmianie. Im mniejsza prędkość, tym dłużej rozpatrywany element znajdować się będzie pod napięciem $g_n(x, t)$, tym dłuższy jest czas trwania $t_{0,5}$, zatem tym większy jest iloczyn $G_m t_{0,5}$.

Ma to swój sens fizyczny. Mianowicie to samo uzwojenie transformatora w powietrzu i zanurzone w oleju będzie znajdowało się w innych warunkach przepięciowych.

Wszystkie tu wymienione wielkości, a więc fale gradientów $K(x, t)$, fale potencjałów wewnętrznych $u_\varphi(x, t)$, napięcie cewkowe $g_n(x, t)$ oraz dalsze wielkości z nimi związane jak G_m i pole ograniczone krzywą $g_n(x, t)$ i osią czasu t są wprost proporcjonalne do amplitudy fali udarowej $U_0 = 1$. Przy fali udarowej prostokątnej maksymalne wartości G_m na jednakowych przedziałach wzdłuż uzwojenia rozkładają się symetrycznie względem środka uzwojenia. Największe z G_m przypadają na przedziały początkowe i stopniowo maleją przy przechodzeniu do przedziałów środkowych. Dla środkowej części uzwojenia wartość G_m jest najmniejsza.

3. STAŁOŚĆ ILOCZYNU $G_m t_{0,5}$

Jak wiadomo, w literaturze fachowej dotyczącej procesów udarowych w transformatorach operuje się pewną wielkością charakterystyczną, mianowicie iloczynem maksymalnej wartości napięcia cewkowego pomnożonym przez czas trwania tego napięcia do połowy amplitudy $G_m t_{0,5}$ (rys. 2). Do wielkości tej przywiązuje się duże znaczenie praktyczne przy przeprowadzaniu prób udarowych [7].

Iloczyn ten pozostaje w pewnym stosunku do pola zawartego między $g_n(x, t)$ i osią czasu na danym przedziale D . Oznaczamy to pole przez S_g .

O ile stosunek $\frac{G_m t_{0,5}}{S_g}$ okaże się praktycznie prawie stały i samo pole S_g stałe, zatem iloczyn $G_m t_{0,5}$ należy praktycznie uznać również stałym.

Analiza przeprowadzona w tym kierunku wykazała następujące własności pól.

I. Fala prostokątna $u(t) = U_0 = 1$.

$$S_{gn}(x) = \int_0^{\frac{x}{v}} g_{n1}(x, t) dt + \int_{\frac{x}{v}}^{\frac{x+D}{v}} g_{n2}(x, t) dt + \int_{\frac{x+D}{v}}^{\infty} g_{n3}(x, t) dt. \quad (12)$$

W wyrażeniu na pole $S_{gn}(x)$ w równaniu (12) nie uwzględniono fali odbitej od końca uzwojenia. W tym przypadku można uzwojenie traktować jako nieskończenie długie. Rozpatrując dla takiego uzwojenia pole $S_{gn}(x)$ na przedziale D położonym na początku uzwojenia, gdy $x=0$ i na końcu uzwojenia, gdy $x \rightarrow \infty$ otrzymujemy, że dla obu tych przedziałów

$$S_{gn}(0) = S_{gn}(\infty) = \frac{D}{v}. \quad (13)$$

Przy tej samej fali prostokątnej, lecz dla uzwojenia o skończonej długości l z uwzględnieniem fali odbitej $K_{1r}(x, t)$, przeprowadzono całkowanie

$$S_{gnr}(x) = \int_0^{\frac{x}{v}} g_{n1}(x, t) dt + \int_{\frac{x}{v}}^{\frac{x+D}{v}} g_{n2}(x, t) dt + \int_{\frac{x+D}{v}}^{\frac{l}{v}} g_{n3}(x, t) dt + \int_0^{\frac{l}{v}} g_{n1r}(x, t) dt. \quad (14)$$

Na podstawie równania (14) dla przedziału D wziętego na początku, środku i końcu uzwojenia, otrzyma się następujące wyniki

$$S_{gnr}(0) = S_{gnr}(l-d) = \frac{D}{v} + \frac{1}{2av} \left\{ e^{-\alpha(D+l)} - e^{\alpha(D-2l)} - e^{-\alpha l} + e^{-2\alpha l} \right\}, \quad (15)$$

$$S_{gnr}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{D}{v} + \frac{1}{2av} \left\{ \left(e^{-\alpha D} - 1 \right) e^{-\frac{3}{2}\alpha l} + \left(e^{-\alpha D} + e^{-5\alpha l} \right) e^{-\frac{5}{2}\alpha l} \right\}. \quad (16)$$

Wyrażenie stojące w nawiasach przedstawia znikomą wartość. Po jego odrzuceniu otrzymamy

$$S_{gnr}(0) = S_{gnr}(l-D) = S_{gnr}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{D}{v} \quad (17)$$

Z równania (17) wynika, że pole na danym przedziale D , wzięte dla dowolnej współrzędnej uzwojenia, jest stałe.

II. Fala ukośnokątna $u(t) = (1 - e^{-pt})$.

Dla fali ukośnej bez uwzględnienia fali odbitej od końca uzwojenia mamy ten sam wynik jak dla fali prostokątnej

$$S_{gp}(0) = S_{gp}(\infty) = \frac{D}{v} \quad (18)$$

oraz po uwzględnieniu fali odbitej

$$S_{gpr}(0) \approx \frac{D}{v} \quad (19)$$

Dla pozostałych fal udarowych stwierdzono na drodze obliczeniowej, że pole na przedziale D przy $x=0$ odpowiada wartości liczbowej $\frac{D}{v}$.

Reasumując powyższe wyniki należy stwierdzić, że pole na przedziale D wzięte w różnych miejscach uzwojenia ma wartość praktycznie stałą równą $\frac{D}{v}$.

Teoretycznie wyprowadzony stosunek $\frac{G_{mt0,5}}{S_{gn}}$ dla fali prostokątnej przy $x=0$ jest

$$\frac{G_{mt0,5}}{S_{gn}} = \frac{(1 - e^{-aD})}{aD} \cdot \ln(1 + e^{aD}). \quad (20)$$

Z obliczeń numerycznych stosunek ten zawierał się w granicach (0,75—0,77). Obliczona wartość stosunku według wzoru (20) wyniosła 0,76.

Wynik ten wskazuje, że stosunek $\frac{G_{mt0,5}}{S_{gn}}$ jest również praktycznie stały.

Stąd wynika stałość iloczynu $G_{mt0,5}$.

4. ZASTOSOWANIA PRAKTYCZNE

Stwierdzenie stałości pól na jednakowych przedziałach uzwojenia może być wykorzystane przy ustalaniu tłumienia na drodze pomiarów laboratoryjnych za pomocą zdjęć oscylograficznych.

W tym celu należy rozpatrywać nie logarytm naturalny stosunku maksymalnych wartości napięć cewkowych sąsiednich cewek, lecz taki

sam logarytm ze stosunku pól S_{gn} i S_{gn+1} , gdyż występujące tłumienie działa jednostajnie wzdłuż uzwojenia obejmując fale u_{q1} i u_{q2} , co z kolei wpływa na wartość pól S_g .

Poza tym w tych układach izolacyjnych, których wytrzymałość elektryczna odpowiada stałości iloczynu $G_m t_{0,5}$ można z powodzenia stosować wzory obliczeniowe napięć cewkowych wyprowadzonych dla fali prostokątnej.

ГРАФИЧЕСКИ-ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРИВОЙ КАТУШЕЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Резюме

В работе дана графическая интерпретация математического выражения катушечного напряжения. Из этой интерпретации следует, что так текущее, как и максимальное значения катушечного напряжения не зависят от фазной скорости.

Напротив — от фазной скорости зависит продолжительность периода времени до момента достижения полупикового значения катушечного напряжения, а затем и произведение.

Кроме того проанализирована область между кривой катушечного напряжения и осью времени. Оказалось, что практически площадь этой области находится в постоянном отношении к произведению $G_{n \max} \cdot t_{0,5}$ на участке постоянного значения D обмотки.

Из этого свойства выведены дальнейшие заключения, а именно: произведение $G_{n \max} \cdot t_{0,5}$ является постоянным на данном участке D однородной обмотки при действии на эту обмотку ударных волн с одинаковой амплитудой: 1. прямоугольной, 2. косоугольной, 3. международной косоугольной, 4. косоугольной с синусоидальным фронтом, причем длина фронта волны для 2, 3 и 4 случаев равна одной микросекунде.

GRAPHICAL INTERPRETATION OF COIL VOLTAGE CURVE

Summary

The paper presents a graphical interpretation of the mathematical expression of the coil voltage. Out of this interpretation it is evident that the voltage value as well as the maximum value of the coil voltage do not depend on the phase velocity.

The duration period of the coil voltage up to the half-peak i. e. the product of $G_{n \max} t_{0,5}$ depends, however, on the phase velocity. The field enclosed between the coil voltage curve and the coordinate axis of time is then analyzed. Within region of constant value of D of the winding this field practically remains in constant relationship to the product of $G_{n \max} t_{0,5}$. This property leads to further conclusions, namely: the product $G_{n \max} t_{0,5}$ within given region of D of winding represents practically a constant value under action of the shock waves of the same amplitude: 1. rectangular, 2. slant-angular, 3. international slant-angular, 4. slant-angular with sinusoidal front, where the front wave length of 2, 3 and 4 being equal to a microsecond.



621.314.21:621.318.42.001.2:621.3.027:535.12

P. CIECHANOWICZ

Zakres stosowania teorii falowej przy obliczaniu napięć cewkowych w uzwojeniach transformatorów

Rękopis dostarczono 3. 2. 1958

W pracy rozpatrzono wpływ fal kombinowanych stacjonarnych na wartości napięć cewkowych obliczanych na podstawie stosowania teorii falowej, gdzie dla wszystkich harmonicznych przyjmuje się prędkość fazową graniczną v_{∞} . Rozważania przeprowadzono dla trzech grup transformatorów, z których jedna miała parametry graniczne. Omówiono zakres stosowania teorii falowej do obliczeń w uzależnieniu tak od typu transformatorów, jak i od formy przebiegu napięcia uderowego.

1. WSTĘP

Dla transformatorów, których wtórne uzwojenie może być traktowane jako ekran, rozkład potencjałów w procesach uderowych na uzwojeniu pierwotnym da się zawsze przedstawić w postaci falowej. W tym przypadku prędkości fazowe wszystkich harmonicznych są jednakowe i stosowanie teorii falowej do obliczania napięć cewkowych nie napotyka żadnych ograniczeń.

W przypadku ogólnym, gdy prędkości fazowe harmonicznych są różne, lecz istnieje graniczna wartość, gdy $k \rightarrow \infty$, to $v_k \rightarrow v_{\infty}$, wówczas wyrażenie na napięcie cewkowe da się przedstawić w następującej postaci

$$g_D(x, t) = \frac{D}{l} + [u_{\varphi 1}(x, t) - u_{\varphi 1}(x + D, t)] + [u_{\varphi 2}(x, t) - u_{\varphi 2}(x + D, t)] + \\ + \sum_{k=1}^{k=k'-1} U_{kp} \left[\sin \frac{k\pi}{l} x - \sin \frac{k\pi}{l} (x + D) \right] \left(\cos \frac{k\pi}{l} v_k t - \cos \frac{k\pi}{l} v_{\infty} t \right). \quad (1)$$

b. dla uzwojenia z punktem zerowym izolowanym

$$g_D(x, t) = [u_{\varphi 1i}(x, t) - u_{\varphi 1i}(x + D, t)] + [u_{\varphi 2i}(x, t) - u_{\varphi 2i}(x + D, t)] + \\ + \sum_{k=1}^{k=k'-1} U_{kp} \left[\sin \frac{k\pi}{2l} x - \sin \frac{k\pi}{2l} (x + D) \right] \left(\cos \frac{k\pi}{2l} v_k t - \cos \frac{k\pi}{2l} v_{\infty} t \right). \quad (2)$$

W wyrażeniach (1) i (2) u_{q1} i u_{q2} oznaczają drgania potencjałów wewnątrz uzwojenia, przedstawione w postaci falowej z prędkościami fazowymi granicznymi v_{∞} . Pozostałe człony pod znakiem sumy zawierają fale stacjonarne kombinowane z prędkościami v_k i v_{∞} , przy czym k dotyczy tej harmonicznej kolejnej, której prędkość fazową v_k przyjmujemy równą v_{∞} . W tych przypadkach, gdy udział tych sum w wartości napięcia cewkowego jest pomijalny, wyrażenia (1) i (2) przyjmują charakter czysto falowy, w przypadku jednak, gdy udział sum jest znaczny w stosunku do pozostałych składników, wówczas występują związane z tym ograniczenia.

2. WPLYW FAL STACJONARNYCH KOMBINOWANYCH NA NAPIĘCIE CEWKOWE

Poddajemy szczegółowej analizie ostatni człon równania (1), który tu napiszemy w następującej postaci

$$g_r(x, t) = \sum_{k=1}^{k=k'-1} U_{kp} [\sin \mu_k x \sin \mu_k (x+D)] (\cos \mu_k v_k t - \cos \mu_k v_{\infty} t), \quad (3)$$

gdzie

$g_r(x, t)$ — oznacza wartość napięcia cewkowego pochodzącą od działania kombinowanych fal stacjonarnych z prędkościami fazowymi v_k i v_{∞} ,

$$\mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, k'.$$

Na wartość $g_r(x, t)$ w równaniu (3) wpływają następujące czynniki

i. Amplituda harmonicznych U_{kp} . Zależy ona od rozkładu początkowego potencjałów, a ten ostatni dla uzwojeń jednorodnych — od $\sigma = al = l \sqrt{\frac{c_{1z}}{c_{1w}}}$

Dla transformatora z punktem zerowym uziemionym

$$U_{kp} = - \frac{2}{l} \int_0^l Y(x) \sin \mu_k x dx, \quad (4)$$

gdzie

$$Y(x) = u_D(x) - u_0(x); \quad (5)$$

z kolei

$$u_D(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) U_0, \quad (6)$$

$$u_0(x) = \frac{\sin h a(l-x)}{\sin h a l}. \quad (7)$$

Po całkowaniu (4) otrzymamy

$$U_{kp} = - \frac{a^2 l^2}{k\pi(a^2 l^2 + k^2 \pi^2)} 2U_0. \quad (8)$$

Dla dużych wartości al mamy duże U_{kp} .

2. Wartość przedziału D i miejsce jego położenia (współrzędna x).

Jedno i drugie (D i x) decydują o wartości różnicy

$$[\sin \mu_k x - \sin \mu_k (x + D)].$$

Gdy $D \rightarrow 0$, różnica dąży do zera.

3. Stosunek $\frac{v_\infty}{v_1}$. Wpływ tego czynnika jest istotny; decyduje on o przydatności teorii falowej i o zakresie jej stosowania. Im ten stosunek jest mniejszy, tym mniejsza różnica wypada dla

$$[\cos \mu_k v_k t - \cos \mu_k v_\infty t]$$

i gdy $v_k \rightarrow v_\infty$ różnica kosinusów dąży do zera.

4. Zakres zmiany $\frac{v_\infty}{v_1}$.

Stosunek $\frac{v_\infty}{v_1}$ otrzymamy ze wzoru

$$\frac{v_k}{v_1} = \sqrt{\frac{\varrho^2 + k^2 \pi^2}{\sigma^2 + k^2 \pi^2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2 + \pi^2}{\varrho^2 + \pi^2}}, \quad (9)$$

szukając granicy $\frac{v_k}{v_1}$, gdy $k \rightarrow \infty$ otrzymamy

$$\frac{v_\infty}{v_1} = \sqrt{\frac{\sigma^2 + \pi^2}{\varrho^2 + \pi^2}}.$$

Zatem stosunek $\frac{v_\infty}{v_1}$ zależy od wartości σ i ϱ . Parametry σ i ϱ są

przynależne do funkcji $n_0(x, y)$ (funkcja sprzężeń pojemnościowych) i $m_0(x, y)$ (funkcja sprzężeń magnetycznych).

Dane zaczerpnięte na podstawie literatury dla transformatorów średnich mocy i napięć są następujące:

Babikow, Komarow i Siergiejew $\sigma = al = (3 \div 15)$

Kostienko M. $\sigma = al = (5 \div 15)$

Sierotinski W. J. $\sigma = al = (3 \div 30)$

Karasiew A. W. $\sigma = al = (6 \div 14)$,

$$\varrho = \lambda l = 3 - 15.$$

¹ Patrz A. W. Karasiew [6] str. 36.

W niniejszej pracy przyjęto dane według Karasiewa, jako bardziej sprecyzowane, mianowicie średnie wartości wynoszą

$$\begin{aligned} \alpha l = \sigma_{sr} = 10 \quad & \text{i} \quad \varrho_{sr} = 9, \\ \sigma_{sr} = 14 \quad & \text{i} \quad \varrho_{sr} = 3,5 \end{aligned}$$

i jako wartości graniczne dla transformatora z uzwojeniem wtórnym bez uwzględnienia pojemności zwierających. Oprócz tego wzięto pod uwagę średnie dane przytoczone przez Hellera i Veverka dla $\sigma_{sr} = 10$ i $\sigma_{sr} = 7$.

Wobec tego dalsze przeliczenia zostały dokonane dla

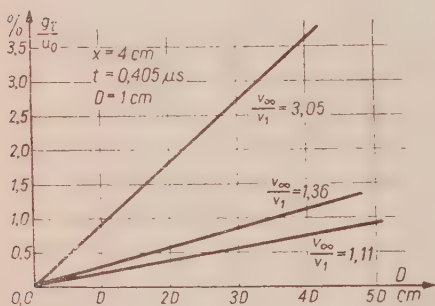
1. $\frac{v_{\infty}}{v_1} = 1,11$ przy $\sigma = 10$, $\varrho = 9$ i $k' = 3$,
2. $\frac{v_{\infty}}{v_1} = 1,36$ przy $\sigma = 10$, $\varrho = 7$ i $k' = 5$,
3. $\frac{v_{\infty}}{v_1} = 3,05$ przy $\sigma = 14$, $\varrho = 3,5$ i $k' = 9$.

Każdemu z tych przypadków odpowiadał transformator z jednorodnym uzwojeniem o długości poosiowej $l = 40$ cm.

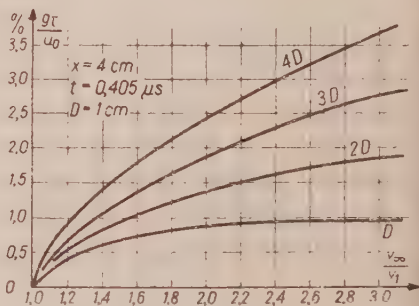
3. WYNIKI KOŃCOWE

Wyniki te są ujęte w postaci krzywych rys. 1a i b oraz rys. 2a i b.

Krzywe podane dla $x = 0$ wykazują silniejszy wpływ fal stacjonarnych na wartość napięć cewkowych, ponieważ harmoniczne wszystkie są tego samego znaku.



Rys. 1a. Procentowy udział w napięciu cewkowym fal stacjonarnych z mieszanymi prędkościami v_{∞} i v_k w funkcji przedziału D uzwojenia dla trzech różnych stałych $\frac{v_{\infty}}{v_1}$, przy $x = \text{const} = 4$ cm i $t = \text{const} = 0.405 \mu s$.



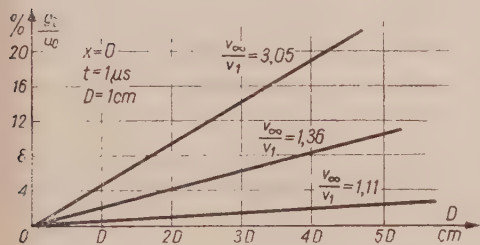
Rys. 1b. Procentowy udział w napięciu cewkowym fal stacjonarnych z mieszanymi prędkościami v_{∞} i v_k w funkcji $\frac{v_{\infty}}{v_1}$, dla różnych stałych D przedziałów uzwojenia, przy $x = \text{const} = 4$ cm i $t = \text{const} = 0.405 \mu s$.

Przeliczenia przeprowadzone dla $x_1 = \frac{1}{4}l$ i $x_2 = \frac{1}{2}l$ dla przypadku

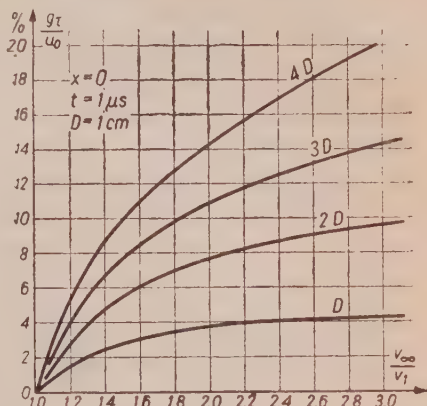
$\frac{v_\infty}{v_1} = 3,05$ i $k' = 9$ oraz $t_1 = 0,577 \mu s$ i $t_2 = 1,28 \mu s$ przy $2D = 2 \text{ cm}$ dały

$$\frac{g_{\tau 1}}{U_0} \cdot 100\% = 7,36\%;$$

$$\frac{g_{\tau 2}}{U_0} \cdot 100\% = 18,5\%.$$



Rys. 2a. Procentowy udział w napięciu cewkowym fal stacjonarnych z mieszanymi prędkościami v_∞ i v_k w funkcji przedziału D uzwojenia dla trzech różnych stałych $\frac{v_\infty}{v_1}$, przy $x = \text{const} = 0$ i $t = \text{const} = 1 \mu s$.



Rys. 2b. Procentowy udział w napięciu cewkowym fal stacjonarnych z mieszanymi prędkościami v_∞ i v_k w funkcji g_∞ , dla różnych stałych D przedziału uzwojenia, przy $x = \text{const} = 0$ i $t = \text{const} = 1 \mu s$.

W stosunku do maksymalnego napięcia cewkowego występującego na danym przedziale $g_{\tau 1}$ i $g_{\tau 2}$ wyniosły 13,2% i 60%.

WNIOSKI KOŃCOWE

1. Dla średnich wartości parametrów ρ i σ podanych w pracy niniejszej można stosować teorię falową, odrzucając jednocześnie niewielki wpływ fal stacjonarnych.

2. Dla granicznych wartości $\sigma=14$, $\rho=3,5$ stosowanie teorii falowej należy uzależnić od wielkości przedziału D w stosunku do posiadanej długości poosiowej uzwojenia.

3. Do obliczania napięcia cewkowego wywołanego falą udarową prostokątną na dowolnym przedziale D uzwojenia przy $t=0$ można stosować teorię falową, gdyż dla chwili $t=0$ $g_\tau(x,0)=0$.

WYKAZ LITERATURY

1. Ciechanowicz P.: Metoda obliczania napięć cewkowych w uzwojeniach transformatorów oparta na teorii falowej gradientów. Zeszyty Nauk. Polít. Gdańskiej, Elektryka nr 1, PWN, 1955 r.

2. Ciechanowicz P.: *Uwzględnienie fal gradientów odbitych przy obliczaniu napięć cewkowych w jednorodnych uzwojeniach transformatorów*. Zeszyty Nauk. Polít. Gdańskiej, Elektryka nr 2, PWN, 1958 r.
3. Frid E. S.: *Rasczot impulsnykh gradientov w mnogokatuszcznykh transformatornykh obmotkach*. Elektrichestvo nr 9, 1950 r.
4. Heler B., Veverka A.: *Les contraintes électriques créées dans un bobinage par une tension du choc unitaire*. CIGRE nr 140, 1952 r.
5. Hasterman Z.: *Udarowa wytrzymałość dielektryczna transformatorów*. Przegląd Elektrot. nr 2/3, 1955 r.
6. Karasiew A. W.: *Teoria elektromagnitnykh processow w obmotkach*. Moskwa 1946 r.
7. Zoller W., Degoumois Ch.: *Les contraintes dues aux ondes de choc dans les transformateurs modernes*, CIGRE, nr 124, 1950 r.

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ КАТУШЕЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРАНСФОРМАТОРНЫХ ОБМОТКАХ

Резюме

В работе рассмотрено влияние комбинированных стационарных волн на катушечное напряжение для трех случаев характеристических параметров трансформатора. Параметры σ и ρ относятся к ёмкостным и индуктивным сопряжениям элементов рассматриваемой обмотки, не находящихся в непосредственном соседстве.

Два случая относятся к трансформаторам со средними параметрами, чаще всего упоминаемыми в литературе (А. В. Карасев $\sigma=10$; $\rho=9$) а также (В. Геллер и А. Веверка $\sigma=10$, $\rho=7$) Третий предельный случай данный А. В. Карасевым относится к данным $\sigma=14$ и $\rho=3,5$.

Результаты рассуждений приведенных в связи с вычислениями сводятся к следующим заключениям:

1. Применение приближенной волновой теории, в которой выступает полный состав волн от $k=1$ до $k=\infty$ фазными скоростями равными предельной скорости V_∞ при выступающем полном составе стационарных волн с комбинированными фазными скоростями $V_\sim$ и V_k в числе от $k=1$ до $k=(k'-1)$, в общем случае ограничено, если в вычислениях не будет учтен полный состав стационарных волн.

2. Неучитывание стационарных волн допустимо, независимо от рода ударной волны: а) если $k' \leq 5$, б) если рассматриваемая трансформаторная обмотка имеет более 10 катушек в одной фазе.

3. Неучитывание стационарных волн допустимо во всяком случае, если вычисления катушечных напряжений вдоль всей длины обмотки связаны только с прямоугольной ударной волной напряжения для момента $t=0$.

4. Влияние стационарных волн на катушечное напряжение является функцией числа стационарных гармоник k величины участка D обмотки, координаты положения участка X и формы ударной волны напряжения.

RANGE OF APPLICATION OF WAVE THEORY IN CALCULATION OF COIL VOLTAGES IN TRANSFORMER WINDINGS

Summary

The influence of the stationary composite waves on the coil voltage for three cases of characteristic transformer parameters is under consideration. These parameters σ and ϱ denote the capacitance linkages and non-neighbouring induction elements of the given winding.

Two cases refer to the transformer characteristics cited in literature by A. W. Karasew $\sigma=10$ and $\varrho=9$ and B. Heller, A. Veverka $\sigma=10$ and $\varrho=7$ and the third one is given by A. W. Karasew $\sigma=14$ and $\varrho=3,5$.

The results of considerations carried out in conjunction with the calculations lead to the following conclusions:

1. The application of the approximate wave theory, when the wave set with $k=1$ to $k=\infty$ and the phase velocities equal to the limit velocity v_∞ arises in conjunction with the stationary wave set with $k=1$ to $k=(k'-1)$ and composite phase velocities v_∞ and v_k , in general case is limited, if in calculations the stationary wave set is not taken into account.

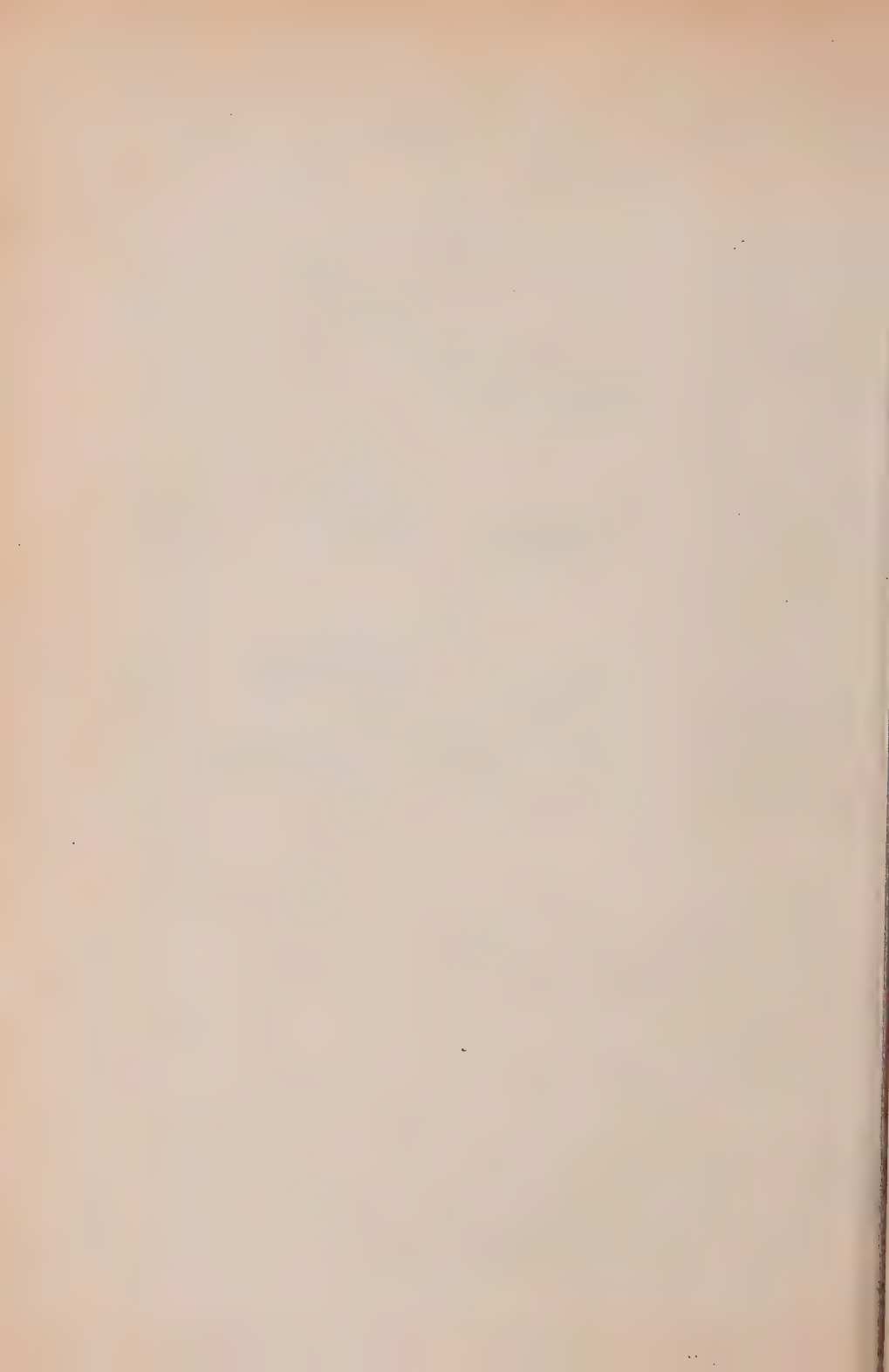
2. Leaving out of account of the stationary waves is permissible regardless of the kind of the shock wave under condition that

a. $k' \leq 5$,

b. the transformer winding, being considered, is multicoil i. e. above ten coils for a phase.

3. Leaving out of account of the stationary waves is permissible in each case under condition, that the coil voltage along the total winding length is linked only with the rectangular shock wave at the instant $t=0$.

4. The influence of the stationary waves on the coil voltage is function of the number of stationary harmonics k' , the magnitude of region D of winding the position coordinate x of the region and the shape of the shock wave of the voltage.



508.56:534.24.001.2

P. SZULKIN

Graficzna metoda obliczania współczynników odbicia od ziemi

Rękopis dostarczono 10. 5. 1958

Obliczanie zespolonego współczynnika odbicia fal elektromagnetycznych jest na ogół rachunkowo bardzo uciążliwe, szczególnie gdy należy uwzględnić zmienność stałej dielektrycznej i przewodności ośrodka odbijającego w funkcji częstotliwości (np. dla fal ultrakrótkich).

Praca podaje metodę graficzną, która, korzystając z pewnych uproszczeń, zresztą zawsze dopuszczalnych w praktyce, pozwala na szybkie i łatwe wyznaczanie współczynnika odbicia zarówno dla polaryzacji pionowej, jak i poziomej fali padającej.

W wielu zagadnieniach propagacji fal elektromagnetycznych jesteśmy zmuszeni uwzględniać zjawisko odbić od ziemi, które charakteryzujemy ilościowo za pomocą odpowiednich współczynników.

W zależności od polaryzacji padającej fali płaskiej mamy R — współczynnik odbicia dla fali pionowo spolaryzowanej i $R_{\perp}$ — współczynnik odbicia dla fali poziomo spolaryzowanej.

Ponieważ ziemia jest niedoskonałym dielektrykiem, posiadającym określoną przewodność, jej skuteczna stała dielektryczna jest liczbą zespoloną. W rezultacie indeks refrakcji jest również liczbą zespoloną, co powoduje, że część energii fali zostaje pochłonięta przez ziemię, fala zaś odbita ma zmienioną fazę. Obliczanie $R_{\parallel}$ i $R_{\perp}$ jest na ogół rachunkowo bardzo uciążliwe, gdyż wymaga szeregu przekształceń liczb zespolonych. Otóż, korzystając z pewnych założeń upraszczających, które są dopuszczalne chociażby dlatego, że wartości parametrów ziemi są raczej przybliżone i uśrednione, można stosunkowo łatwo i szybko wyznaczyć współczynnik odbicia metodą graficzną.

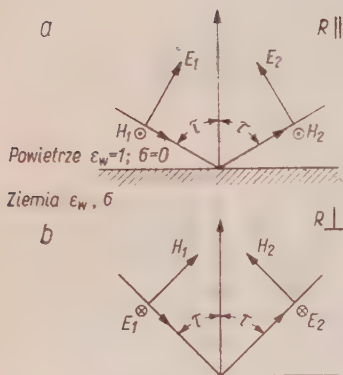
Rozpatrzmy falę płaską, której kierunek propagacji tworzy kąt τ z normalną do powierzchni ziemi. Wówczas, jak wiadomo, współczynniki odbicia dla kierunków wektorów z rys. 1 wyrażają się wzorami:

$$R_{\perp} = \frac{n^2 \cos \tau - \sqrt{n^2 - \sin^2 \tau}}{n^2 \cos \tau + \sqrt{n^2 - \sin^2 \tau}}, \quad (1)$$

$$R_{\perp} = \frac{\cos \tau - \sqrt{n^2 - \sin^2 \tau}}{\cos \tau + \sqrt{n^2 - \sin^2 \tau}}, \quad (2)$$

gdzie

$$n^2 = \epsilon_w - j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} = (a - j\beta)^2, \quad (3)$$



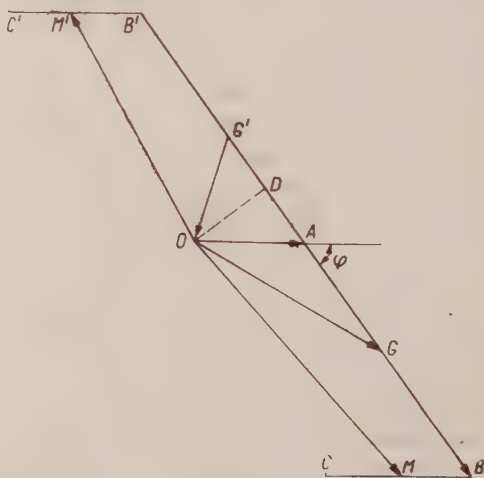
Rys. 1

$R_{\parallel}$ ϵ_w — stała dielektryczna względna ziemi.
 σ — przewodność ziemi w mho/m

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\text{farad}}{\text{m}}.$$

Dla wartości parametrów większości rodzajów gleby n^2 jest bardzo duże w porównaniu z $\sin^2 \tau$; toteż zaniedbując $\sin^2 \tau$ pod pierwiastkiem, wprowadzamy błąd nie przekraczający 5%. (Należy zaznaczyć, że dla dużych częstotliwości i małych przewodności błąd dla $R_{\parallel}$ może być większy w pobliżu kąta padania, równego kątowi Brewstera). Zatem z dostatecznie dobrym

przbliżeniem możemy napisać wzory (1) i (2) w postaci



Rys. 2

$$R_{\parallel} = \frac{n \cos \tau - 1}{n \cos \tau + 1}; \quad 1 + R_{\perp} = \frac{2n \cos \tau}{n \cos \tau + 1}; \quad 1 - R_{\perp} = \frac{2}{n \cos \tau + 1}; \quad (4)$$

$$R_{\perp} = \frac{\cos \tau - n}{\cos \tau + n}; \quad 1 + R_{\perp} = \frac{2 \cos \tau}{\cos \tau + n}; \quad 1 - R_{\perp} = \frac{2n}{\cos \tau + n}. \quad (5)$$

Wzory (4) i (5) mają prostą interpretację graficzną.

Odkładamy odcinek OA o długości jednostkowej (rys. 2).

Wektor AB reprezentuje wielkość n , tj. $|AB| = |n|$, $\varphi = -\arctg \frac{\beta}{a}$.

Następnie odkładamy $AG = n \cos \tau$. Wówczas $|R_{\perp}| = \frac{|G'O|}{|OG|}$, co wynika

bezpośrednio z rysunku.

Prowadząc w punktach B i B' równoległe do OA i odkładając $CB = C'B' = 1$ oraz $CM = C'M' = \cos \tau$, mamy $|R_{\perp}| = \frac{OM'}{OM}$.

Otóż $|G'O|^2 = (G'A - DA)^2 + (DO)^2 = (n \cos \tau - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi$,

$|OG|^2 = (DA + AG)^2 + (OD)^2 = (n \cos \tau + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi$.

Stosunek $\frac{|G'O|}{|OG|}$ będzie minimalny, gdy

$$\frac{\partial}{\partial (\cos \tau)} \left[\frac{|G'O|^2}{|OG|^2} \right] = 0,$$

co nastąpi dla $n \cos \tau = 1$, tj. gdy $AG = 1$.

Otóż dla $|AG| = |G'A| = 1$ $\angle G'OG = \frac{\pi}{2}$ i $\cos \tau = \frac{1}{|n|}$.

Podstawiając ten wynik do (4) i biorąc pod uwagę równanie (3) otrzymujemy

$$R_{\perp \min} = - \frac{j\beta}{a + \sqrt{a^2 + \beta^2}},$$

$$\text{a więc } |R_{\perp \min}| = \frac{\beta}{a + \sqrt{a^2 + \beta^2}} \text{ i } \delta = - \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Obliczmy teraz kąt fazowy dla n . Z równania (3) mamy

$$\varphi = -\arctg \frac{\beta}{a} = -\arcsin \frac{\beta}{\sqrt{a^2 + \beta^2}} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + \beta^2}}, \quad (7)$$

czyli

$$|R_{\perp \min}| = \left(\tg \frac{1}{2} \varphi \right). \quad (8)$$

Jednocześnie z (4) mamy

$$1 + R_{\perp} = \frac{2n \cos \tau}{n \cos \tau + 1} = \frac{2 \cos \tau}{\cos \tau + \frac{1}{n}} = \frac{2 \cos \tau}{\sqrt{\left(\cos \tau + \frac{a}{a^2 + \beta^2} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{a^2 + \beta^2} \right)^2}} \quad (9)$$

gdzie

$$\varphi_1 = -\arctg \frac{\frac{\beta}{a^2 + \beta^2}}{\cos \tau + \frac{a}{a^2 + \beta^2}}. \quad (10)$$

Oznaczmy przez R^* wartość $R_{\perp}$ dla $\tau = \frac{\pi}{2}$; wówczas

$$1 + R_{\parallel}^* = 0 \mid \varphi_0 \varphi_0, \text{ gdzie } \varphi_0 = -\arctg \frac{\beta}{a}.$$

Stąd, uwzględniając (9) mamy

$$\sin (\varphi_1 - \varphi_0) = \frac{\beta}{2\sqrt{a^2 + \beta^2}} \mid 1 + R_{\parallel} \mid. \quad (11)$$

A więc $1 + R_{\parallel}$ leży na kole w płaszczyźnie zespolonej.

Tym samym udowodniliśmy, że i $R_{\parallel}$ leży na kole.

Podobnie

$$1 - R_{\perp} = \frac{2}{\frac{\cos \tau}{n} + 1} = \frac{2}{\sqrt{\left(1 + \frac{a \cos \tau}{a^2 + \beta^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta \cos \tau}{a^2 + \beta^2}\right)^2}} \mid \varphi_2, \quad (12)$$

gdzie

$$\varphi_2 = -\arctg \frac{\frac{\beta \cos \tau}{a^2 + \beta^2}}{1 + \frac{a \cos \tau}{a^2 + \beta^2}}. \quad (13)$$

Łatwo się przekonać, że i w tym przypadku

$$\sin (\varphi_2 - \varphi_0) = \frac{\beta}{2\sqrt{a^2 + \beta^2}} \mid 1 - R_{\perp} \mid. \quad (14)$$

Widzimy więc, że zarówno $1 - R_{\perp}$, jak i $R_{\perp}$ leżą na tym samym kole co $R_{\parallel}$.

Powyższe rozważania prowadzą do oczywistej konstrukcji graficznej, pozwalającej na bezpośrednie wyznaczenie $R_{\parallel}$ i $R_{\perp}$. Odkładamy odcinek BA o długości 2 (rys. 3). Ze środka O prowadzimy w górę OC o długości $R_{\parallel \min} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$. Z punktu C opuszczamy w dół odcinek o długości $r = \frac{1 + R_{\perp \min}}{2R_{\parallel \min}}$ co pozwala znaleźć środek koła o promieniu r . Następnie zataczamy łuk tego koła, dla którego podstawa AB jest cięciwą.

Aby znaleźć $R_{\parallel}$, odkładamy kąt $\Psi_1 = 2\varphi_1 = 2 \arctg \frac{\beta}{a + \cos \tau (a^2 + \beta^2)}$ wówczas $R_{\parallel}$ jest dany przez (rys. 3)

$$(R_{\parallel}) = RO$$

$$\Psi_1 = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{2\beta}{a} \frac{1}{a \cos \tau + 1}; \quad \Psi_2 = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{2\beta}{a} \frac{\cos \tau}{\cos \tau + a}.$$

Miejsce geometryczne punktów R leży na prostej AB , przy czym $R_{||}$ i $R_{\perp}$ mają fazy 0° lub 180° .

$r\Psi_1 = \frac{2}{a \cos \tau + 1}$ i $r\Psi_2 = \frac{2 \cos \tau}{\cos a + \tau}$ reprezentują odległości punktów R od punktu B .

$$\text{Dla } \tau = 0 \quad r\Psi_1 \frac{2}{a+1} = r\Psi_2$$

oraz

$$R_{||} = 1 - r\Psi_1 = \frac{a-1}{a+1} = \frac{\sqrt{\epsilon_w - 1}}{\sqrt{\epsilon_w + 1}},$$

$$R_{\perp} = -1 + r\Psi_2 = \frac{1-a}{1+a} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_w}}{1 + \sqrt{\epsilon_w}}.$$

Otrzymujemy więc dobrze znane wzory dla podania normalnego.

Dla kąta Brewstera $\cos \tau_\beta = \frac{1}{a}$ i $r\Psi_1 = 1$, co daje $R_{||} = 0$.

Dla $\tau > \tau_\beta$ i $r\Psi_1 > 1$ i $R_{||}$ znajduje się na prawo od O mając fazę 180° natomiast dla $\tau < \tau_\beta$ i $r\Psi_1 < 1$, $R_{||}$ jest na lewo od O i ma fazę 0° .

$R_{\perp}$ jest zawsze na lewo od O i ma fazę 180° dla dowolnego kąta τ .

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ОТ ПОЧВЫ

Расчет комплексного коэффициента отражения электромагнитных волн вообще говоря весьма затруднителен в смысле необходимых вычислений, в особенности когда является необходимым учитывать изменчивость постоянной диэлектрической по проводимости отражающей среды в функции частоты (напр. для ультракоротких волн).

Настоящий труд дает графический метод, который при некоторых упрощениях, впрочем вполне допустимых на практике, позволяет скоро и легко определять коэффициент отражения для поляризации как вертикальной, так и горизонтальной падающих волн.

GRAPHICAL METHOD OF CALCULATING THE FROM EARTH'S SURFACE REFLECTION COEFFICIENT

The calculation of the complex coefficient of electromagnetic wave reflection is, in general, very cumbersome. This is particularly true if the dielectric constant and the conductivity of the reflecting medium change with the frequency. This should be taken into account in the case of e. g. ultra short waves.

This paper shows, on the basis of certain however, actually always permissible approximations, a graphical method enabling to determine promptly and adequately the reflection coefficient for the incident wave with a vertical as well as a horizontal polarization.

508.56:534.213

P. SZULKIN

Propagacja fal elektromagnetycznych w ograniczonym ośrodku przewodzącym

Rękopis dostarczono 24. 3. 1958

Praca dotyczy problemu promieniowania pionowego dipola elektrycznego w ośrodku przewodzącym, graniczącym wzdłuż płaszczyzny z ośrodkiem bezstratnym. Przeprowadzono obliczenia pola elektromagnetycznego w założeniu modelu propagacji, w którym rolę podstawową odgrywa płaszczyzna graniczna.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Badanie warunków propagacji fal elektromagnetycznych w nieograniczonym, izotropowym ośrodku przewodzącym nie następuje specjalnych trudności i opiera się na klasycznej teorii promieniowania. Wiadomo, że w odróżnieniu od propagacji w próżni lub dielektryku doskonałym, znaczna przewodność ośrodka powoduje szybkie tłumienie fal, co ogranicza lub wręcz uniemożliwia ich praktyczne zastosowania techniczne.

W niniejszej pracy zajmiemy się innym modelem propagacji w ośrodku przewodzącym, wykorzystując założone ograniczenie przestrzenne tego ośrodka.

W tym celu rozpatrzmy ośrodek przewodzący o stałej dielektrycznej ϵ_1 i przewodności σ_1 (np. woda morską), graniczący wzdłuż płaszczyzny z ośrodkiem prawie nieprzewodzącym (np. powietrzem) o stałej dielektrycznej ϵ_2 i przewodności $\sigma_2=0$. Zakładamy, że przenikalność magnetyczna obu ośrodków jest jednakowa i równa $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Wprowadzamy pojęcie zespolonej stałej dielektrycznej (przyjmując charakter harmoniczny w czasie fali $e^{j\omega t}$)

$$\bar{\epsilon} = \epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \right) \quad (1a)$$

$$\text{lub } \bar{\epsilon}_w = \epsilon_w - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \epsilon_w - j\chi, \quad (1b)$$

gdzie ϵ_w — względna stała dielektryczna, $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m, podczas gdy

$$\chi = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \quad (2)$$

jest częścią urojoną lub przewodzącą zespolonej stałej dielektrycznej względnej $\bar{\epsilon}_w$.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że χ dla ośrodka 1 jest liczbą bardzo dużą. I tak np. dla wody morskiej ($\sigma=4$) nawet przy $f=1$ MHz/sek, $\chi=7,7 \cdot 10^4$, a więc znacznie większe od $\epsilon_w=80$. Pozwala to zastosować aproksymację dla ośrodka 1

$$\bar{\epsilon}_{w1} \approx -j\chi, \quad (3)$$

przy czym jednak należy pamiętać, że $\bar{\epsilon}_w$ ma małą, dodatnią część rzeczywistą.

Wiadomo, że funkcja falowa fali płaskiej w ośrodku dielektrycznym ma postać

$$e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}z} = e^{-j\omega} \sqrt{\bar{\epsilon}_w} z = e^{-j\frac{\omega}{c}} \sqrt{\bar{\epsilon}_w} z$$

i daje zmianę fazy w funkcji odległości z . W wyrażeniu tym λ oznacza długość fali w rozpatrywanym ośrodku $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ zaś jest prędkością propagacji w próżni.

Gdy ośrodek jest przewodzący, analogiczna funkcja falowa, po uwzględnieniu równania (3) będzie:

$$e^{-j\frac{\omega}{c}} \sqrt{\bar{\epsilon}_w} z = e^{-j\frac{\omega}{c}} \sqrt{j\chi} z = e^{-j\frac{\omega}{c}(1-j)} \sqrt{\frac{\chi}{2}} z = e^{-j\frac{\omega}{c}} \sqrt{\frac{\chi}{2}} z e^{-\frac{\omega}{c}} \sqrt{\frac{\chi}{2}} z.$$

Mamy tu wykładniczy czynnik tłumienia $e^{-\frac{\omega}{c}} \sqrt{\frac{\chi}{2}} z$, który jest przyczyną szybkiego zaniku energii przy propagacji bezpośredniej, o czym wspomnieliśmy poprzednio, oraz czynnik fazowy $e^{-j\frac{\omega}{c}} \sqrt{\frac{\chi}{2}} z$, który daje długość fali w rozpatrywanym ośrodku

$$\lambda_1 = \frac{c}{f} \sqrt{\frac{2}{\chi}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{2}{\chi}}, \quad (4a)$$

gdzie λ_0 — długość fali w próżni.

Podstawiając do tego wzoru równanie (2) otrzymujemy

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\sigma}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\mu_0 \sigma f}}. \quad (4b)$$

Widzimy, że w ośrodku przewodzącym długość fali jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z częstotliwości, podczas gdy w ośrodku dielektrycznym jest ona odwrotnie proporcjonalna do f . I tak np. częstotliwość $f=100$ kHz odpowiada $\lambda_0=3000$ m w próżni i $\lambda_1=5$ m w wodzie morskiej.

Podajemy jeszcze wyrażenia stałej propagacji γ i liczby falowej k w ośrodku przewodzącym. Mamy

$$\gamma = \sqrt{(\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu} \approx \sqrt{j\omega\mu\sigma}. \quad (5a)$$

Wprowadzając $a = \text{Re}(\gamma)$ przy uwzględnieniu (4b) otrzymujemy

$$\gamma = a(1 + j) \quad \text{ i } \quad a = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{2\pi}{\lambda_1}. \quad (5b)$$

Często wygodnie jest posługiwać się liczbą falową k , określaną przez

$$jk = \gamma, \quad k = a(1 - j). \quad (6a)$$

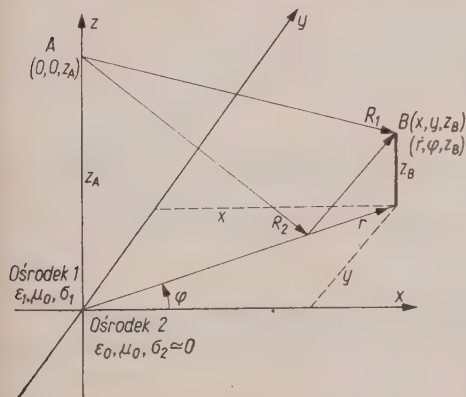
Biorąc pod uwagę (1a) mamy

$$k = \frac{\gamma}{j} = \frac{1}{j} \sqrt{(\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu} = \frac{1}{j} \sqrt{j\omega\epsilon j\omega\mu}$$

i ostatecznie

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_w}. \quad (6b)$$

Zagadnienie, które chcemy rozwiązać, można sformułować następująco. W punkcie A o współrzędnych $(0, 0, z_A)$ ośrodka 1 znajduje się promienisty, elektryczny dipol pionowy. Szukamy wyrażenia natężenia pola elektromagnetycznego w punkcie B o współrzędnych (x, y, z_B) , znajdującymi się również w ośrodku 1.



Rys. 1

Płaszczyzna graniczna między ośrodkiem 1 i ośrodkiem 2 wyraża się równaniem $z=0$. Początek współrzędnych jest rzutem punktu A na tę płaszczyznę graniczną (rys.1). R_1 jest odległością bezpośrednią między punktami A i B droga zaś promienia odbitego od powierzchni granicznej równa się R_2 . Widzimy, że postawione zagadnienie jest odwróceniem problemu Sommerfelda. Rozwiążemy go, opierając się częściowo na metodzie

Sommerfelda, dla pionowego dipola elektrycznego, który scharakteryzujemy przez jego moment M .

Wprowadzamy potencjał wektorowy Hertza Π , skierowany równolegle

do wektorowego momentu dipola, tj. wzdłuż osi z . Mamy wówczas dla nieskończonego ośrodka izotropowego

$$\Pi = \frac{Me^{-jkR} e^{j\omega t}}{4\pi j\omega \epsilon R}, \quad (7)$$

gdzie R jest odległością między dipolem a punktem obserwacji.

Wykażemy, że potencjał Π , odpowiadający pionowemu dipolowi elektrycznemu, wyraża się przez całkę zawierającą funkcję Bessela. Całka ta powstaje w rezultacie superpozycji cylindrycznych funkcji falowych, spełniających warunki brzegowe dopasowania w źródle i na granicy obu ośrodków. Mając Π możemy łatwo wyznaczyć składowe pola elektromagnetycznego na podstawie wzorów

$$\begin{aligned} \vec{H} &= j\omega \epsilon \text{rot } \Pi, \\ \vec{E} &= \text{grad div } \Pi + k^2 \Pi. \end{aligned} \quad (8)$$

W przypadku anteny pionowej, gdy dipol, a więc i potencjał, są skierowane w kierunku z , otrzymujemy następujące składowe pola w układzie współrzędnych cylindrycznych z uwzględnieniem symetrii pola względem φ

$$\begin{aligned} H_\varphi &= -j\omega \epsilon \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \\ E_r &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial r}, \\ E_z &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu \Pi, \\ E_\varphi &= H_r = H_z = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

W dalszym ciągu, dla uproszczenia, pomijamy mnożniki $\frac{M}{4\pi j\omega \epsilon}$ oraz $e^{j\omega t}$ przy $\frac{e^{-jkR}}{R}$ w wyrażeniu (7), gdyż nie mają one istotnego znaczenia dla rozważań.

Analiza problemu promieniowania dipola umieszczonego w próżni (lub w powietrzu) nad ośrodkiem przewodzącym prowadzi do wyrażenia dla potencjału wektorowego [1]:

$$\pi = \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} + G. \quad (10)$$

Występuje tu fala bezpośrednia, fala odbita i człon korekcyjny G . Człon

ten jest potencjałem, jaki istniałby w punkcie na wysokości $z = z_A + z_B$, gdyby źródło było umieszczone na powierzchni granicznej. Inaczej mówiąc, ponieważ ta funkcja jest związana z powierzchnią, fale jej odpowiadające muszą przejść drogę z_A od źródła do powierzchni granicznej i z powrotem drogę z_B do punktu obserwacji.

Przyjmując zasadniczo wzór (10) jako punkt wyjścia dla naszego problemu, można stwierdzić a priori, że pierwsze dwa człony nie są istotne dla rozważanego modelu propagacji, a to ze względu na dużą część urojonej wielkości k_1 . Wynikające stąd tłumienie wykładnicze jest bardzo wielkie, tak że amplitudy tych członów stają się znikome nawet dla stosunkowo małych odległości. A więc decydującym członem dla omawianej propagacji w ośrodku 1 jest G .

Dalsze sformułowanie matematyczne problemu jest analogiczne do ujęcia Sommerfelda.

2. POTENCJAŁ WEKTOROWY

Potencjał wektorowy musi spełniać równanie falowe

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad (11)$$

wszędzie z wyjątkiem źródła (gdzie równanie przestaje być jednorodne). Dalej wiemy, że w najbliższym sąsiedztwie źródła Π musi mieć postać określoną równaniem (7), co jest konieczne aby móc dopasować całkowite rozwiązanie do źródła dipolowego. Ponieważ dipol jest całkowicie w ośrodku 1, warunek ten nie dotyczy ośrodka 2. Oprócz tego Π musi spełniać warunek zaniku pola w nieskończoności, co jest oczywiste z fizycznego punktu widzenia.

Oznaczając przez Π_1 potencjał w ośrodku 1 i przez Π_2 potencjał w ośrodku 2 mamy jeszcze następujące warunki na powierzchni granicznej, wynikające z ciągłości składowych stycznych $\vec{E}$ i $\vec{H}$ oraz składowych normalnych $\vec{D}$ i $\vec{B}$:

$$\bar{\epsilon}_1 \Pi_1 = \bar{\epsilon}_2 \Pi_2,$$

czyli

$$-j\chi \Pi_1 = \Pi_2$$

oraz

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} \quad \text{dla } z=0. \quad (12)$$

Reasumując, mamy 4 warunki, które musi spełniać nasze rozwiązanie:

$$\begin{array}{ll}
 1. & \nabla^2 \Pi_1 + k_1^2 \Pi_1 = 0 \quad z > 0 \\
 & \nabla^2 \Pi_2 + k_2^2 \Pi_2 = 0 \quad z < 0 \\
 2. & \Pi_1 \approx \frac{e^{-jk_1 R}}{R} \quad \text{dla } R \rightarrow 0 \\
 & \quad \quad \quad z > 0 \\
 3. & \Pi_1 \rightarrow 0 \quad \text{dla } R \rightarrow \infty \quad z > 0 \\
 & \Pi_2 \rightarrow 0 \quad \text{dla } R \rightarrow \infty \quad z < 0 \\
 4. & -j\chi \Pi_1 = \Pi_2 \quad \text{dla } z = 0 \\
 & \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}
 \end{array} \quad (12)$$

Rozwiązaniem równania falowego we współrzędnych cylindrycznych z symetrią kołową jest

$$\Pi = c J_0(\eta r) e^{\pm \sqrt{\eta^2 - k^2} z}, \quad (14)$$

gdzie η — parametr, wprowadzony przy rozdzieleniu zmiennych w równaniu falowym a $z = z_A + z_B$.

Całkowite rozwiązanie można napisać w postaci [2]

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \frac{e^{-jk_1 R}}{R} + \int_0^\infty g_1(\eta) J_0(\eta r) e^{-\sqrt{\eta^2 - k_1^2} z} d\eta \\
 \Pi_2 &= \int_0^\infty g_2(\eta) J_0(\eta r) e^{+\sqrt{\eta^2 - k_2^2} z} d\eta.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Pierwszy człon w wyrażeniu dla Π_1 jest potrzebny do spełnienia warunku 2 w równaniach (13).

Należy teraz wyrazić człon wykładniczy za pomocą cylindrycznych funkcji falowych. Korzystamy tu z wyniku otrzymanego przez Sommerfelda

$$\frac{e^{-jk_1 R}}{R} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - k_1^2}} J_0(\eta r) e^{-\sqrt{\eta^2 - k_1^2} z} \eta d\eta. \quad (16)$$

Pozwala to napisać wzory (15) w postaci całek

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \int_0^\infty \left[\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - k_1^2}} + g_1(\eta) \right] J_0(\eta r) e^{-\sqrt{\eta^2 - k_1^2} z} d\eta, \\
 \Pi_2 &= \int_0^\infty g_2(\eta) J_0(\eta r) e^{+\sqrt{\eta^2 - k_2^2} z} d\eta.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Przypominamy, że Π ze wzoru (17) odpowiada członowi G z równania (10). Jest to potencjał w punkcie $(r, \varphi, z=z_A+z_B)$ wywołany przez dipol umieszczony na powierzchni granicznej (od strony ośrodka 1).

Należy jeszcze wyznaczyć $g_1(\eta)$ i $g_2(\eta)$ z warunków brzegowych 4 w równaniach (13). Otóż

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^{-jkR}}{R} \right]_{z=0} = \frac{\partial}{\partial R} \left[\left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) \frac{z}{R} \right]_{z=0} = 0,$$

co pozwala po podstawieniu warunków 4 do (15) napisać

$$\int_0^\infty [-j\chi g_1(\eta) - g_2(\eta)] J_0(\eta r) d\eta = \int_0^\infty \frac{j\chi}{\sqrt{\eta^2 - k_1^2}} J_0(\eta r) \eta d\eta, \quad (18)$$

$$\int_0^\infty [g_1(\eta) \sqrt{\eta^2 - k_1^2} + g_2(\eta) \sqrt{\eta^2 - k_2^2}] J_0(\eta r) d\eta = 0. \quad (19)$$

Rozwiązując te równania względem $g_1(\eta)$ i $g_2(\eta)$ otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} g_1(\eta) &= \frac{j\chi\beta_2}{\frac{\omega}{c}\beta_1(\beta_1 - j\chi\beta_2)}, \\ g_2(\eta) &= \frac{-j\chi\eta}{\frac{\omega}{c}(\beta_1 - j\chi\beta_2)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\eta^2 - k_1^2} &= \frac{\omega}{c}\beta_1, \\ \sqrt{\eta^2 - k_2^2} &= \frac{\omega}{c}\beta_2. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Podstawiając (20) do (17) mamy po uproszczeniu

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{c}{\omega} \int_0^\infty \frac{1}{\beta_1 - j\chi\beta_2} J_0(\eta r) e^{-\frac{\omega}{c}\beta_1 z} \eta d\eta, \\ \Pi_2 &= \frac{c}{\omega} \left(-j\chi \right) \int_0^\infty \frac{1}{\beta_1 - j\chi\beta_2} J_0(\eta r) e^{-\frac{\omega}{c}\beta_2 z} \eta d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Zmieniamy teraz zmienną całkowania tak, aby względna stała dielektryczna występowała bezpośrednio, a nie była ukryta w k . Oznaczmy

$$\xi = \frac{c}{\omega} \eta.$$

Wtedy zgodnie z (21) oraz (3) i (6b)

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{\xi^2 + j\chi}, \\ \beta_2 &= \sqrt{\xi^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (23a)$$

Przyjmijmy ponadto

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \frac{\omega}{c} r = \frac{2\pi}{\lambda_0} r, \\ \zeta &= \frac{\omega}{c} z = \frac{2\pi}{\lambda_0} z. \end{aligned} \right\} \quad (23b)$$

Wówczas $\eta r = \xi \varrho$,

$$e^{-\frac{\omega}{c} \beta_1 z} = e^{-\beta_1 \zeta}; \quad e^{\frac{\omega}{c} \beta_2 z} = e^{\beta_2 \zeta}$$

i równania (22) możemy napisać w postaci

$$\left. \begin{aligned} II_1 &= \frac{\omega}{c} \int_0^\infty \frac{1}{\beta_1 - j\chi\beta_2} J_0(\xi\varrho) e^{-\beta_1 \zeta} \xi d\xi, \\ II_2 &= \frac{\omega}{c} \left(-j\chi \right) \int_0^\infty \frac{1}{\beta_1 - j\chi\beta_2} J_0(\xi\varrho) e^{\beta_2 \zeta} \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Wyznaczenie potencjału II_1 sprowadza się więc do obliczenia całki

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{\beta_1 - j\chi\beta_2} J_0(\xi\varrho) e^{-\beta_1 \zeta} \xi d\xi, \quad (25)$$

gdyż wielkość potencjału II_2 (w ośrodku 2) nie jest interesująca z wyjątkiem specjalnego przypadku $\zeta=0$ ($z=0$), który zresztą można znaleźć bezpośrednio z rozwiązania (25).

Całkę (25) obliczymy metodą Sommerfelda przez deformację konturu całkowania na płaszczyźnie zespolonej ξ . Zasadniczą nowością, którą wprowadzimy, jest aproksymacja pozwalająca na wyrażenie rezultatu dla $z \neq 0$ jako funkcji wykładniczej względem z , pomnożonej przez wartość II dla $z=0$. Aproksymacja ta jest jedynie możliwa ze względu na to, że rozważany problem dotyczy propagacji w ośrodku przewodzącym.

Przed wybraniem konturu całkowania dla I zauważmy, że funkcja podcałkowa w (25) ma punkty rozgałęzienia

$$\left. \begin{aligned} R_1 \quad \xi &= (-1+j) \sqrt{\frac{\chi}{2}}, \\ R_2 \quad \xi &= (1-j) \sqrt{\frac{\chi}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Druga para punktów rozgałęzienia leży na osi rzeczywistej, która jest drogą całkowania. Aby usunąć tę trudność przypominamy, że założyliśmy na początku, iż przewodność ośrodka 2 jest bliska zera ($\sigma_2 \approx 0$) i dotychczas przyjmowaliśmy wszędzie $\sigma_2 = 0$. Uwzględniając teraz małą lecz skończoną, dodatnią przewodność ośrodka 2 oznaczamy

$$\bar{\epsilon}_{w2} = 1 - j\Delta, \quad (27)$$

gdzie Δ jest małe lecz skończone. Daje to dalsze dwa punkty rozgałęzienia

$$\left. \begin{aligned} R_3 \quad \xi &\approx -1 + j\frac{\Delta}{2}, \\ R_4 \quad \xi &\approx 1 - j\frac{\Delta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Oprócz tego mamy bieguny funkcji podcałkowej gdy

$$\beta_1 - j\chi\beta_2 = 0,$$

tj. dla

$$\xi^2 = \frac{\chi}{\sqrt{1+\chi^2}} \left(1 - \frac{j}{\chi} \right) \approx 1 - \frac{j}{\chi}.$$

Stąd

$$\left. \begin{aligned} \text{biegun } B_1 \quad \xi &\approx -1 + \frac{j}{2\chi}, \\ \text{biegun } B_2 \quad \xi &\approx 1 - \frac{j}{2\chi}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Zastępujemy funkcję Bessela J_0 występującą w (25) przez funkcję Hankela $H_0^{(1)}$, co ma swe zalety przy całkowaniu. W tym celu korzystamy ze znanych tożsamości

$$J_0(x) = \frac{1}{2} [H_0^{(2)}(x) + H_0^{(1)}(x)],$$

$$H_0^{(2)}(x) = -H_0^{(1)}(-x),$$

co daje

$$J_0(x) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(x) - H_0^{(1)}(-x)].$$

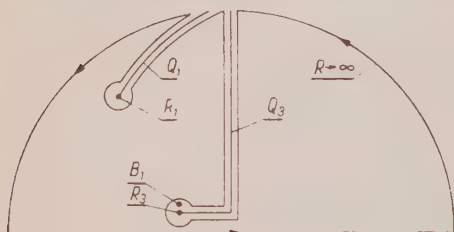
Podstawiając to do (25) otrzymujemy

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta_1 \xi}}{\beta_1 - j\chi\beta_2} H_0^{(1)}(\xi\varrho) \xi d\xi - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta_1 \xi}}{\beta_1 - j\chi\beta_2} H_0^{(1)}(-\xi\varrho) \xi d\xi.$$

Zamiana ξ na $-\xi$ w drugiej całce i odwrócenie granic całkowania dają ostatecznie

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta_1 \xi}}{\beta_1 - j\chi\beta_2} H_0^{(1)}(\xi\varrho) \xi d\xi. \quad (30)$$

Widzimy, że dla $\xi \rightarrow \infty$ mianownik redukuje czynnik ξ w liczniku, zarówno funkcja Hankela, jak i funkcja wykładnicza (z odpowiednim znakiem dla pierwiastka kwadratowego w β_1) sprowadzają funkcję podcałkową do zera w górnej półpłaszczyźnie ξ dla nieskończenie dużego argumentu.



Rys. 2

Pozwala to na zamknięcie konturu całkowania półkolem o promieniu $R \rightarrow \infty$ od dodatniej osi rzeczywistej do ujemnej osi rzeczywistej poprzez górną półpłaszczyznę. Tak wyznaczony kontur całkowania zawiera 2 punkty rozgałęzienia R_1 i R_3 oraz jeden biegun B_1 (rys. 2).

Całka wzdłuż półkola o promieniu $R \rightarrow \infty$ jest — zgodnie z założeniem — równa zero. Obierając Q_1 tak aby β_1 było urojone, można łatwo się przekonać, że udział całki wzdłuż Q_1 jest znikomy (znajdujemy się w tej części płaszczyzny ξ , gdzie moduł ξ jest duży). Gdy bowiem ϱ jest rzędu jedności lub więcej, najmniejsza urojona część składowa ξ jest

w R_1 i równa się (zgodnie z 26) $\sqrt{\frac{\chi}{2}}$. A więc funkcja Hankela ma maksy-

malną wartość na tej drodze równą $e^{-\varrho \sqrt{\frac{\chi}{2}}}$, gdyż $H_0^{(1)}(\xi\varrho)$ można zastąpić aproksymacją asymptotyczną $e^{j\varrho\xi}$. Pozostaje nam punkt rozgałęzienia R_3 i biegun B_1 . Zauważmy, że

$$\beta_2 = \pm \sqrt{\xi^2 - (1 - j\Delta)} = \pm \xi \sqrt{1 - \frac{1 - j\Delta}{\xi^2}}.$$

Dla dużych ξ można przyjąć

$$\beta_2 \approx \pm \xi.$$

Ze względu na dużą wartość χ punkty R_3 i B_1 są bardzo bliskie względem siebie i możemy je objąć jedną pętlą. Q_3 obieramy tak, aby odpowiadała

ona przeważnie urojonomu β_2 . Wówczas część całki wzdłuż Q_3 , odpowiadająca dużym wartościom ξ można zaniedbać, podobnie jak to miało miejsce dla całki wzdłuż Q_1 . Pozostaje więc tylko wartość całki wzdłuż części Q_3 , gdzie ξ jest małe. Dla tej części można — zgodnie z (23a) — przyjąć

$$\beta_1 \approx \sqrt{j\chi} = \text{const.} \quad (31)$$

W ten sposób obliczenie całki (30) sprowadza się do wyznaczenia

$$I = \frac{e^{-\sqrt{j\chi}\xi}}{2} \int_{Q_3} \frac{1}{\beta_1 - j\chi\beta_2} H_0^{(1)}(\xi\rho) \xi d\xi. \quad (32)$$

Wielkość $\frac{1}{\beta_1 - j\chi\beta_2}$ można napisać uwzględniając (31)

$$\frac{1}{\beta_1 - j\chi\beta_2} \approx \frac{1}{\sqrt{j\chi}(1 - \sqrt{j\chi}\beta_2)} = \frac{1}{-j\chi\beta_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{j\chi}\beta_2}\right)} \quad (33)$$

$\frac{1}{\sqrt{j\chi}\beta_2}$ ma wartość bardzo dużą w bezpośredniej bliskości R_3 , równa się

jedności w B_1 i jest mniejsza od jedności na zewnątrz koła C , otaczającego R_3 i przechodzącego przez B_1 . Można więc wszędzie na zewnątrz C zastosować dla (33) rozwinięcie w szereg zbieżny

$$\frac{1}{\beta_1 - j\chi\beta_2} = \frac{1}{-j\chi\beta_2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{j\chi}\beta_2} + \frac{1}{(\sqrt{j\chi}\beta_2)^2} + \dots\right). \quad (34)$$

Podstawiając (34) do (32) mamy

$$I = \frac{e^{-\sqrt{j\chi}\xi}}{-j2\chi} \left[I_0 + \frac{I_1}{\sqrt{j\chi}} + \frac{I_2}{(\sqrt{j\chi})^2} + \dots \right], \quad (35)$$

gdzie

$$I_n = \int_{Q_3} \frac{H_0^{(1)}(\xi\rho) \xi d\xi}{\beta_2^{n+1}}. \quad (36)$$

Dla n parzystego zastosujemy inną postać całek I_n , którą dał Sommerfeld

$$I_n = -\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\rho} \frac{\mu^{n-1} e^{-j\sqrt{e^2+\mu^2}}}{\sqrt{e^2+\mu^2}} d\mu.$$

Podstawiając $\tau = \sqrt{e^2 + \mu^2}$ w powyższym wyrażeniu dla I_n , otrzymujemy

$$I_n = -\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\rho} (\tau^2 - e^2)^{\frac{n-2}{2}} e^{-j\tau} d\tau. \quad (37)$$

Wzór ten zastosujemy dla wszystkich n parzystych ($n \geq 2$). I_0 otrzymuje się bezpośrednio jako

$$I_0 = \frac{e^{-j\varrho}}{\varrho}. \quad (38a)$$

Dla I_2 mamy zgodnie z (37)

$$I_2 = - \int e^{-j\tau} d\tau = -j e^{-j\varrho}, \quad (38b)$$

podobnie

$$I_4 = - \frac{1}{3!} \int (\tau^2 - \varrho^2) e^{-j\tau} d\tau = \frac{j(j\varrho)}{1 \cdot 3} \left[1 + \frac{1}{j\varrho} \right] e^{-j\varrho}, \quad (38c)$$

$$I_6 = \frac{-j(j\varrho)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} \left[1 + \frac{3}{j\varrho} + \frac{3}{(j\varrho)^2} \right] e^{-j\varrho}, \quad (38d)$$

$$I_8 = \frac{j(j\varrho)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \left[1 + \frac{6}{j\varrho} + \frac{15}{(j\varrho)^2} + \frac{15}{(j\varrho)^3} \right] e^{-j\varrho}. \quad (38e)$$

Dolna granica całkowania dla (37) daje zawsze zero dzięki założeniu skończonej przewodności Δ ośrodka 2.

Dla $\varrho \geq \lambda_0$ można ograniczyć się do pierwszych członów całek parzystych $I_{2\mu}$, co prowadzi do wzoru ogólnego

$$I_{2\mu} = \frac{(-1)^\mu j (j\varrho)^{\mu-1} e^{-j\varrho}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\mu-1)}. \quad (38)$$

Całki nieparzyste $I_{2\mu+1}$ najłatwiej obliczyć stosując twierdzenie o residuach, gdyż dla n nieparzystego β_2 występuje w mianowniku w potęgę parzystej, tak że funkcja podcałkowa posiada biegun rzędu $\frac{n+1}{2}$.

Przyjmujemy

$$I_{2\mu+1} = 2\pi j \operatorname{Res}_{(2\mu+1)}.$$

gdzie

$$\operatorname{Res}_{(2\mu+1)} = \frac{1}{\mu!} \frac{d^{(\mu)}}{d\xi^{(\mu)}} \left| \frac{\xi H_n^{(1)}(\xi\varrho)}{(\xi-1)^{\mu+1}} \right|_{\xi=-1}.$$

Daje to

$$\operatorname{Res}_{(1)} = \frac{1}{0!} \frac{(-1)}{(-2)} H_0^{(1)}(-\varrho) = \frac{1}{0!} \frac{H_0^{(1)}(-\varrho)}{2},$$

$$\operatorname{Res}_{(3)} = \frac{1}{1!} \frac{d}{d\xi} \left| \frac{\xi H_0^{(1)}(\xi\varrho)}{(\xi-1)^2} \right|_{\xi=-1} = \frac{\varrho H_1^{(1)}(-\varrho)}{4}.$$

W podobny sposób można obliczyć dalsze wyrażenia, które wszystkie zawierają jedynie funkcje Hankela $H_0^{(1)}$ i $H_1^{(1)}$.

Stosując aproksymację funkcji $H_0^{(1)}(-\varrho)$ i $H_1^{(1)}(-\varrho)$, ważne dla dużego argumentu

$$H_0^{(1)}(-\varrho) \approx \sqrt{\frac{2}{-\pi\varrho}} e^{-j\varrho} e^{-j\pi/4} = \sqrt{\frac{2j}{\pi\varrho}} e^{-j\varrho},$$

$$H_1^{(1)}(-\varrho) \approx \sqrt{\frac{2}{-\pi\varrho}} e^{-j\varrho} e^{-j\frac{3\pi}{4}} = -j \sqrt{\frac{2j}{\pi\varrho}} e^{-j\varrho}$$

i wprowadzając je do poprzednich wzorów, otrzymujemy przybliżone wartości całek nieparzystych

$$I_1 = \frac{1}{0!} j \sqrt{\frac{2\pi j}{\varrho}} e^{-j\varrho}, \quad (39a)$$

$$I_3 = \frac{1}{1!} j \sqrt{\frac{2\pi j}{\varrho}} \left(\frac{-j\varrho}{2} \right) e^{-j\varrho}, \quad (39b)$$

$$I_5 = \frac{1}{2!} j \sqrt{\frac{2\pi j}{\varrho}} \left(\frac{-j\varrho}{2} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{j\varrho} \right] e^{-j\varrho}, \quad (39c)$$

$$I_7 = \frac{1}{3!} j \sqrt{\frac{2\pi j}{\varrho}} \left(\frac{-j\varrho}{2} \right)^3 \left[1 + \frac{4}{j\varrho} + \frac{8}{(j\varrho)^2} \right] e^{-j\varrho} \quad (39d)$$

i tak dalej.

Ograniczając się do pierwszych członów tych całek mamy ogólnie

$$I_{2\mu+1} = \frac{1}{\mu!} j \sqrt{\frac{2\pi j}{\varrho}} \left(\frac{-j\varrho}{2} \right)^\mu e^{-j\varrho}. \quad (39)$$

Podstawiamy teraz (38) i (39) do (35) i uwzględniając, że

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \left(-\frac{\varrho}{2\chi} \right)^\mu = e^{-\varrho/2\chi}$$

otrzymujemy

$$I \approx \frac{j e^{-j\varrho} e^{-\sqrt{j\chi\varrho}}}{2\chi\varrho} \left[j \sqrt{\frac{2\pi\varrho}{\chi}} e^{-\varrho/2\chi} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{-1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\mu-1)} \left(-\frac{\varrho}{\chi} \right)^\mu \right].$$

Wprowadzamy „odległość numeryczną”

$$\psi = \varrho/\chi,$$

co pozwala napisać poprzedni wzór w postaci

$$I \approx \frac{j e^{-j\varrho} e^{-\sqrt{j\chi\varrho}}}{2\chi\varrho} \left[j \sqrt{2\pi\psi} e^{-\psi/2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{-1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2\mu-1)} (-\psi)^\mu \right]. \quad (40)$$

Oznaczając przez S_1 czynnik korekcyjny

$$S_1 = j\sqrt{2\pi\psi} e^{-\varphi/2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{-1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2\mu-1)} (-\psi)^\mu \quad (41)$$

mamy ostatecznie

$$I \approx j \frac{e^{-j\varphi} e^{-\sqrt{j\pi\psi}}}{2\chi\varrho} S_1. \quad (42)$$

Aczkolwiek szereg w (40) jest zbieżny dla wszystkich wartości ψ , nie jest on zbyt wygodny dla obliczeń numerycznych gdy $\psi \gg 1$. W tym przypadku można z powodzeniem zastosować następujące przekształcenie. Wprowadzamy nową zmiannę $t = \sqrt{\psi}$. Wtedy szereg z (40) można napisać

$$S = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{-1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2\mu-1)} (-\psi)^\mu = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{-1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2\mu-1)} (-t^2)^\mu.$$

Łatwo sprawdzić, że S spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{S-1}{t} \right) = -S.$$

Wprowadzając nową funkcję $w = \frac{S-1}{t}$, otrzymujemy

$$\frac{dw}{dt} = -wt - 1.$$

Dobrze znanym rozwiązaniem tego równania jest

$$w(t) = -e^{-\int_0^t \alpha d\alpha} \int_0^t e^{\int_0^\alpha \alpha d\alpha} d\tau,$$

czyli

$$w(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{\tau^2}{2}} d\tau.$$

Stąd obliczamy

$$S = 1 - tw(t) = 1 - t e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{\tau^2}{2}} d\tau$$

i wracając do zmiennej ψ

$$S = 1 - \sqrt{\psi} e^{-\frac{\psi}{2}} \int_0^{\sqrt{\psi}} e^{\frac{\tau^2}{2}} d\tau,$$

gdzie całka występująca w powyższym równaniu jest stabularyzowana (patrz np. [3]).

W ten sposób dla $\psi \gg 1$ możemy korzystać ze wzoru

$$I = j \frac{e^{-j\varrho} e^{-\sqrt{j\kappa\zeta}}}{2\kappa\varrho} \left[j \sqrt{2\pi\psi} e^{-\frac{\psi}{2}} + 1 - \sqrt{\psi} e^{-\frac{\psi}{2}} \int_0^{\sqrt{\psi}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \right] \quad (43)$$

lub

$$I = j \frac{e^{-j\varrho} e^{-\sqrt{j\kappa\zeta}}}{2\kappa\varrho} S_2, \quad (44)$$

gdzie

$$S_2 = \left(j \sqrt{2\pi} - \int_0^{\sqrt{\psi}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \right) \sqrt{\psi} e^{-\frac{\psi}{2}} + 1. \quad (45)$$

Dotychczasowe obliczenia oparte były na założeniu, że odległość ϱ jest rzędu długości fali λ_0 lub większa. Pozostaje jeszcze rozpatrzyć przypadek, gdy ϱ jest rzędu jedności, czyli $\psi \ll 1$. Obliczenie poszczególnych całek z równań (38a do 38e) wykonaliśmy odrzucając w nawiasach człony, mające w mianowniku wielkość $j\varrho$ lub jej potęgę. Przy obecnym założeniu musimy wzory te napisać następująco:

$$\text{Zamiast (38a)} \quad I_0 = \frac{e^{-j\varrho}}{\varrho},$$

$$,, \quad (38b) \quad I_2 = -j e^{-j\varrho},$$

$$,, \quad (38c) \quad I_4 = \frac{j}{3} [1 + j\varrho] e^{-j\varrho},$$

$$,, \quad (38d) \quad I_6 = -\frac{j}{5} \left[1 + j\varrho + \frac{(j\varrho)^2}{3} \right] e^{-j\varrho},$$

$$,, \quad (38e) \quad I_8 = \frac{j}{7} \left[1 + j\varrho + \frac{2}{5} (j\varrho)^2 + \frac{1}{15} (j\varrho)^3 \right] e^{-j\varrho} \text{ itd.}$$

Jednocześnie aproksymacje asymptotyczne funkcji Hankela użyte przy wyprowadzaniu wzorów (39a do 39d) są teraz nieuzasadnione, ponieważ dla $\psi \ll 1$ argumenty tych funkcji są niewystarczająco duże. Mamy więc

$$\text{zamiast (39a)} \quad I_1 = j\pi H_0^{(1)}(-\varrho),$$

$$\text{zamiast (39b)} \quad I_3 = \frac{j\pi\varrho}{2} H_1^{(1)}(-\varrho) \text{ itd.}$$

Podstawiając te nowe wyrażenia dla całek I_n do (35) otrzymujemy

$$I = \frac{j e^{-j\varrho} e^{-\sqrt{j\chi^2}}}{2\chi\varrho} \left\{ 1 + \left(\frac{-\varrho}{\chi} \right) - \frac{j\varrho}{1 \cdot 3\chi^2} (1 + j\varrho) + \frac{\varrho}{1 \cdot 5\chi^3} \left[1 + j\varrho + \frac{(j\varrho)^2}{3} \right] + \dots \right. \\ \left. + \frac{\varrho}{e^{-j\varrho}} \left[\frac{\pi \sqrt{j}}{\sqrt{\chi}} H_0^{(1)}(-\varrho) + \frac{\pi j}{(j\chi)^{3/2}} H_1^{(1)}(-\varrho) + \dots \right] \right\}. \quad (46)$$

Ponieważ χ jest bardzo duże, ϱ zaś jest rzędu jedności, można poprzestać na pierwszym członie w nawiasie i wtedy

$$I = j \frac{e^{-j\varrho} e^{-\sqrt{j\chi^2}}}{2\chi\varrho} S_3, \quad (47)$$

gdzie

$$S_3 = 1. \quad (48)$$

W ten sposób dochodzimy do ostatecznego rezultatu, że w przypadku

$$\psi = \frac{\varrho}{\chi} \ll 1 \quad \varrho \text{ rzędu jedności (np. } \leq 10)$$

całka I wyraża się wzorem (47) (z $S_3=1$) dla większych zaś odległości należy stosować wzór (42) (gdzie S_1 jest dane przez (41) lub wzór (44) (gdzie S_2 jest dane przez (45))).

Znając wartość całki I możemy na podstawie wzorów (24) i (25) napisać wyrażenie dla potencjału wektorowego Π_1 w ośrodku 1.

$$\Pi_1 = \frac{\omega}{c} I, \quad (49)$$

a stąd za pomocą równań (9) wyznaczyć składowe pola.

3. SKŁADOWE POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Korzystając z równań (9) i (49) i uwzględniając założenie 3 możemy napisać

$$H_\varphi = -\frac{\omega^2}{c} \varepsilon_0 \chi \frac{\partial I}{\partial r}, \\ E_r = \frac{\omega}{c} \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial r}, \quad (50)$$

$$E_z = \frac{\omega}{c} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - j\chi \frac{\omega^2}{c^2} I \right),$$

$$E_\varphi = H_r = H_z = 0.$$

Po zmianie z na ζ oraz r na ϱ (za pomocą wzorów 23b) i obliczeniu odpowiednich pochodnych, otrzymujemy, biorąc pod uwagę równanie (2):

$$\begin{aligned}
 H_{\varphi} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \sigma \frac{\partial I}{\partial \varrho}, \\
 E_r &= -\frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{j\chi} \frac{\partial I}{\partial \varrho}, \\
 E_z &= 0, \\
 E_{\varphi} &= H_r = H_z = 0.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Widzimy, że pozostały jedynie dwie składowe H_{φ} i H_r , które zawierają pochodną $\frac{\partial I}{\partial \varrho}$. Pochodną tę można obliczyć, korzystając z wzorów poprzednio wyprowadzonych.

Pisząc I w następującej postaci ogólnej

$$I = j \frac{e^{-j\varrho} e^{-\sqrt{j\chi}\varrho}}{2\chi\varrho} S \tag{52}$$

mamy

$$\frac{\partial I}{\partial \varrho} = \frac{j e^{-j\varrho} e^{-\sqrt{j\chi}\varrho}}{2\chi\varrho} \left[-\left(j + \frac{1}{\varrho}\right) S + \frac{\partial S}{\partial \varrho} \right]. \tag{53}$$

Człon $\frac{\partial S}{\partial \varrho}$ w nawiasie kwadratowym można zaniedbać, gdyż

$$\frac{\partial S}{\partial \varrho} = \frac{\partial S}{\partial \psi} \frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial S}{\partial \psi}, \tag{53}$$

zaś χ jest bardzo duże. Ostatecznie pozostaje więc

$$\frac{\partial I}{\partial \varrho} \approx -\frac{j e^{-j\varrho} e^{-\sqrt{j\chi}\varrho}}{2\chi\varrho} \left(j + \frac{1}{\varrho}\right) S, \tag{54}$$

gdzie S ma jedną z postaci danych przez (41), (44) lub (48) w zależności od wartości odległości ϱ .

Możemy teraz napisać wyrażenia składowych pola uwzględniając równanie (54)

$$\left. \begin{aligned}
 H_{\varphi} &= j \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\sigma}{2\chi} \frac{e^{-j\varrho}}{\varrho} e^{-\sqrt{j\chi}\varrho} \left(j + \frac{1}{\varrho}\right) S, \\
 E_r &= -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{2\sqrt{j\chi}} \frac{e^{-j\varrho}}{\varrho} e^{-\sqrt{j\chi}\varrho} \left(j + \frac{1}{\varrho}\right) S, \\
 E_{\varphi} &= E_z = H_r = H_z = 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{55}$$

Wprowadzając opuszczony w trakcie obliczeń stały czynnik $\frac{M}{4\pi j\omega\bar{\epsilon}}$ (patrz

równanie 7) oraz korzystając ze wzoru (5) możemy dać ostateczną postać składowych pola

$$H_{\varphi} = - \left(\frac{\epsilon_0}{8\pi c^2} \right) M \frac{\omega^3}{\sigma} \frac{e^{-j\omega t}}{r} e^{-\gamma z} \left(1 + \frac{1}{j\omega} \right) S,$$

$$E_r = - \sqrt{j} \left(\frac{\epsilon_0}{8\pi c^2} \right) \frac{\omega^3}{\sigma^{1/2}} M \frac{e^{-j\omega t}}{r} e^{-\gamma z} \left(1 + \frac{1}{j\omega} \right) S \quad (56)$$

Są to składowe pola w ośrodku 1. Nas interesuje również pole bezpośrednio przy powierzchni granicznej od strony ośrodka 2. Aby je znaleźć, wystarczy zastosować warunki brzegowe w wyrażeniu (55).

Jak wiadomo, składowe styczne E i H oraz składowe normalne D i B muszą być ciągłe. Oznacza to

$$E_{r1} = E_{r2},$$

$$H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2}.$$

Ponieważ pole 55 nie posiada składowych normalnych, zostaje ono przy przejściu przez granicę niezmiennione.

Postać równań składowych pola wskazuje, że odwrotnie do tego, co ma miejsce w ośrodkach dielektrycznych (np. w powietrzu) elektryczny dipol pionowy ma w ośrodku przewodzącym jedynie składowe pola poziome. Oddzielane pole w punkcie obserwacyjnym ma postać fali płaskiej załamanej do ośrodka 1 z powierzchni granicznej. Powierzchnie stałej fazy i stałej amplitudy są prawie równoległe do płaszczyzny rozdzielającej oba ośrodki.

W ten sposób dochodzimy do następującego modelu propagacji fal elektromagnetycznych w ośrodku przewodzącym z uwzględnieniem płaszczyzny ograniczającej. Fala powstająca w źródle, umieszczonym w ośrodku przewodzącym, dochodzi do powierzchni granicznej, gdzie jest częściowo załamana. Fala załamana pojawia się w ośrodku 2 (nieprzewodzącym) po drugiej stronie powierzchni granicznej i rozchodzi się równoległe do niej, tracąc po drodze w sposób ciągły małe ilości energii przez częściową refrakcję do ośrodka 1. Można tu pomyśleć o analogii ze stratą energii w falowodzie. Fala w ośrodku 1 rozchodzi się tak, jakby źródło jej było na powierzchni granicznej i dane jest przez wyżej wyprowadzone równania.

WYKAZ LITERATURY

1. Jahnke und Emde: *Funktionentafeln* — Dover, Nr 4 s. 32.
2. Sommerfeld: *Vorlesungen über theoretische Physik* — t. VI, Rozdz. 6.
3. Weyl: *Electromagnetic theory* Ann. Physik 60, 481, 1919.
Mc Graw-Hill, 1941, s. 585.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОРГАНИЧЕСКОЙ
ПРОВОДИЩЕЙ СРЕДЕ

Резюме

Настоящий анализ посвящен излучению вертикального диполя в проводящей среде, граничащей вдоль плоскости со средой без потерь.

Произведено вычисление электромагнитного поля, исходя из модели распространения, в которой основную роль играет граничная плоскость.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A SEMI-INFINITE
CONDUCTING MEDIUM

Summary

This paper deals with the radiation problem of a vertical electric dipole in a semi-infinite conducting medium. Above the border plane we have a lossless medium.

The border plane constitutes an essential part of the assumed model of propagation. An explicit calculation of the electric field is carried out.



031.396.622.71:517

J. LENKOWSKI

Analiza detektora diodowego jako układu parametrycznego

Rękopis dostarczono 31. 3. 1958

W pracy przeprowadzono analizę detektora diodowego jako obwodu z opornością periodycznie zmienną w czasie. Uzyskane równanie różniczkowe ze zmiennymi współczynnikami rozwiązano metodą kolejnych przybliżeń. Uzyskane w ten sposób pierwsze przybliżenie wykazało zgodność z wynikami osiągniętymi w innej pracy [1] za pomocą odmiennej metody.

1. WSTĘP

Ujęcie detektora diodowego jako obwodu z opornością periodycznie zmienną w czasie jest dość przekonujące fizycznie, szerzej jednak nie było stosowane w analizie tego układu jedynie dzięki trudnościom formalno-matematycznym związanym z rozwiązaniem odpowiedniego równania różniczkowego. Brak, jak wiadomo, bowiem ogólnego rozwiązania równań liniowych o zmiennych współczynnikach. Dodatkową trudność powoduje wymaganie uzyskania wyniku w postaci szeregu Fouriera uwytłaczającym poszczególne harmoniczne.

Z szeregu potencjalnie możliwych metod rozwiązań metodą kolejnych perturbacji bezsprzeczne zalety posiada metoda Schelkunoffa [4], zastosowana później przez Zadeha [5] do obliczania tak zwanej funkcji systemu w układach parametrycznych.

Stosując tę metodę do rozwiązania danego liniowego równania różniczkowego

$$a_n(t) y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t) y(t) = f(t), \quad (1)$$

gdzie

 t — zmienna niezależna,

 $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ — zmienne współczynniki,

 $y(t)$ — poszukiwana funkcja,

 $f(t)$ — funkcja pobudzająca,

poszukiwaną funkcję można przedstawić w postaci szeregu

$$y(t) = y_I(t) + y_{II}(t) + y_{III}(t) + \dots \quad (2)$$

Dla rozważanej klasyfikacji przybliżenia przepływamy równanie (1) w postać

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t) + P[y(t)] \quad (3)$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ jest liczbą stałą, a wartość $f(t)$ oraz

$$P[y(t)] = [a_n - a_n^1(t)]y^{(n)}(t) + \dots + [a_1 - a_1^1(t)]y'(t) \quad (4)$$

są funkcjami czasu, które są funkcjami period. Pierwsze przybliżenie $y_1(t)$ rozważamy jako rozwiązanie niejednorodnego równania różniczkowego ze stałymi współczynnikami

$$a_n y_1^{(n)}(t) + \dots + a_1 y_1'(t) = f(t). \quad (5)$$

Dla drugiego przybliżenia otrzymamy iteracyjnie rozwiązując równanie

$$a_n y_2^{(n)}(t) + \dots + a_1 y_2'(t) = P[y_1^{(n)}(t)], \quad (7)$$

które są również równaniami o stałych współczynnikach.

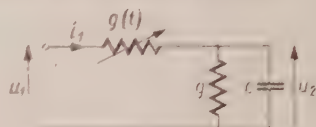
Rozwiązanie (2), jest szeregiem zależnym dla przypadku $a_n(t) - a_n < \epsilon$, $a_1(t) - a_1 < \epsilon$.

2. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Zastępując diodę (rys. 1) przewodnością periodycznie zmienną $g(t)$ (rys. 2), otrzymamy obwód dający się analizować metodą opisaną.



Rys. 1.
Czterozwojowy detektor diodowy



Rys. 2.
Układ zastępczy detektora diodowego

W danym przypadku mamy

$$i_1 = (u_1 - u_2)g(t) = gu_2 + \dot{c}u_2, \quad (8)$$

$$\dot{c}u_2 + [g + g(t)]u_2 = u_1g(t). \quad (9)$$

Jako napęcie wejściowe u_1 przyjmujemy w danym przypadku

$$u_1 = mU \cos \Omega t \cos \omega t, \quad (10)$$

gdzie

m — głębokość modulacji,

U — amplituda częstotliwości nośnej,

Ω — pulsacja obwiedni modulacyjnej,

ω — pulsacja obwiedni nośnej.

Celowość przyjęcia tego rodzaju napięcia u_1 wynika z następujących rozważań. Przewodność $g(t)$, obrazująca diodę detekcyjną, zmienia się w granicach między wartością zerową (w chwili braku przepływu prądu), a wartością $g_i = \frac{1}{R_i}$, gdzie R_i — oporność wewnętrzna diody. W przypadku idealnym można przyjąć, że przebieg ma kształt prostokątny o szerokości impulsu 2θ , równej kątowi przewodzenia diody. Jest zrozumiałe, że oporność $g(t)$ jest sterowana nośną, którą też z tego względu pomineliśmy w napięciu wejściowym (10). Z tego samego też względu przebieg $g(t)$ musi być zgodny w fazie z nośną napięcia wejściowego. Wobec powiedzianego powyżej przyjmujemy

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t, \quad (11)$$

gdzie

$$a_0 = g_i \frac{\theta}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2g_i}{n\pi} \sin n\theta.$$

Podstawiając wartości u_1 i $g(t)$ do (9), otrzymamy ostatecznie

$$\begin{aligned} \text{albo} \quad C\dot{u}_2 + [g + g(t)] u_2 &= mU \cos \Omega t \cos \omega t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t \\ C\dot{u}_2 + [g + g(t)] u_2 &= \frac{mU}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{ \cos [(n+1)\omega + \Omega] t + \cos [(n-1)\omega - \Omega] t + \\ &\quad + \cos [(n+1)\omega - \Omega] t + \cos [(n-1)\omega + \Omega] t \}. \end{aligned} \quad (12)$$

3. ROZWIĄZANIE PRZYBLIŻONE RÓWNAŃ

Zgodnie z omówioną na wstępie metodą, pierwsze przybliżenie u_{2I} jest rozwiązaniem równania

$$\begin{aligned} C\dot{u}_{2I} + \left(g + g_i \frac{\theta}{\pi} \right) u_{2I} &= \frac{mU}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{ \cos [(n+1)\omega + \Omega] t + \\ &\quad + \cos [(n-1)\omega - \Omega] t + \cos [(n+1)\omega - \Omega] t + \cos [(n-1)\omega + \Omega] t \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Nas interesuje bezpośrednio jedynie składowa o pulsacji Ω w napięciu u_2 , z tego też względu możemy ograniczyć się do rozwiązania uproszczonego równania, w którym strona prawa zawiera jedynie składowe o pulsacji Ω to znaczy dla $n=1$

$$C\dot{u}_{2I} + \left(g + g_i \frac{\theta}{\pi} \right) u_{2I} = \frac{mU a_1}{2} \cos \Omega t. \quad (14)$$

Stąd bezpośrednio napiszemy amplitudę zespoloną składowej ustalonej rozwiązania (14) jako

$$U_{21} = mU \frac{\frac{a_1}{2}}{j\Omega C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} = mU \frac{\frac{a_1}{2}}{a_0 + Y}, \quad (15)$$

gdzie $Y = j\Omega C + g$ jest admitancją obciążenia diody.

Z otrzymanego wyrażenia obliczymy sprawność detekcji

$$\eta = \frac{U_{21}}{mU} = \frac{\frac{a_1}{2}}{a_0 + Y}. \quad (16)$$

Dla dalszych rozważań potrzebne będzie jednak pełne wyrażenie U_{21} zawierające wszystkie harmoniczne. Biorąc pod uwagę, że chodzi tu podobnie jak poprzednio o składową ustaloną rozwiązania (13), otrzymamy

$$u_{21} = \frac{mU}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j[(n+1)\omega + \Omega]t}}{j[(n+1)\omega + \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \right. \\ \left. + \frac{e^{j[(n-1)\omega - \Omega]t}}{j[(n-1)\omega - \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \frac{e^{j[(n+1)\omega - \Omega]t}}{j[(n+1)\omega - \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \right. \\ \left. + \frac{e^{j[(n-1)\omega + \Omega]t}}{j[(n-1)\omega + \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} \right\}. \quad (17)$$

4. ADMITANCJA WEJŚCIOWA DETEKTORA

Admitancja wejściowa da się obliczyć jako iloraz

$$Y_{in} = \frac{I_1}{mU}, \quad (18)$$

gdzie I_1 jest amplitudą zespoloną wyrażenia (8), z którego jednak wybiera się jedynie składowe o pulsacji napięcia wejściowego, to znaczy $(\omega + \Omega)$.

Podstawiając do równania

$$i_1 = (u_1 - u_2)g(t)$$

wielkość u_1 z (10) oraz u_2 z (17), otrzymamy

$$i_1 = \left[mU \cos \Omega t \cos \omega t - \frac{mU}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j[(n+1)\omega + \Omega]t}}{j[(n+1)\omega + \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \right. \right.$$

$$+ \frac{e^{j[(n-1)\omega - \Omega]t}}{j[(n-1)\omega - \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \frac{e^{j[(n+1)\omega - \Omega]t}}{j[(n+1)\omega - \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} +$$

$$+ \left. \frac{e^{j[(n-1)\omega + \Omega]t}}{j[(n-1)\omega + \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} \right\} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right|.$$

Po przekształceniu będzie

$$i_1 = \frac{mU}{4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \cos[(n+1)\omega + \Omega]t + \cos[(n-1)\omega - \Omega]t + \cos[(n+1)\omega - \Omega]t + \right. \right.$$

$$\left. + \cos[(n-1)\omega + \Omega]t \right\} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j[(n+1)\omega + \Omega]t}}{j[(n+1)\omega + \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \right.$$

$$+ \frac{e^{j[(n-1)\omega - \Omega]t}}{j[(n-1)\omega - \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \frac{e^{j[(n+1)\omega - \Omega]t}}{j[(n+1)\omega - \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} +$$

$$\left. \left. \frac{e^{j[(n-1)\omega + \Omega]t}}{j[(n-1)\omega + \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} \right\} \right]. \quad (19)$$

Z otrzymanego wyrażenia wybieramy składowe o pulsacji $(\omega \pm \Omega)$. W pierwszej grupie składników, odpowiadających iloczynowi $u_1 g(t)$ pożądaną pulsację otrzymamy dla $n=0$ we wszystkich czterech wyrażach, to znaczy $\cos[(n+1)\omega \pm \Omega]t$ i $\cos[(n-1)\omega \pm \Omega]t$ oraz dla $n=2$ w dwóch wyrażach $\cos[(n-1)\omega \pm \Omega]t$.

W drugiej grupie składników, przedstawiających iloczyn $u_2 g(t)$, wyrazy o pożądanej pulsacji tworzą pewien szereg. Część ich jednak może być odrzuconą w przypadku, jeżeli moduł admittancji $j\omega C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g$ występującej w mianowniku, jest wystarczająco duży. Kryterium tego jest oczywiście wartość pulsacji q , która w przypadku granicznym dolnym może mieć wartość Ω . W tych rozważaniach oczywiście mierzycie zakładamy, że $\omega > \Omega$. W rezultacie, wybierając z drugiej grupy składników jedynie te, dla których $q > \Omega$, otrzymamy

$$i_1 = \frac{mU}{4} \left\{ 2a_0 [\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t] + a_2 [\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t] + \right.$$

¹ To znaczy, że bierzemy jedynie wyrazy drugiego szeregu a_n dla $n=1$, co prowadzi do znanego już wyniku (15).

albo

$$i_1'' = mU \left[a_0 \cos \Omega t \cos \omega t + \frac{a_2}{2} \cos \Omega t \cos \omega t - \frac{a_1^2}{2} \cos \omega t \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{e^{j\Omega t}}{j\Omega C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} \right) \right] \quad (20)$$

skąd dalej napiszemy wartość zespolonej amplitudy prądu

$$I_1 = mU \left(a_0 + \frac{a_2}{2} - \frac{\frac{a_1^2}{2}}{Y + a_0} \right), \quad (21)$$

gdzie $Y = j\Omega C + g$.

Podstawiając (21) do (18) otrzymamy wreszcie

$$Y_{1n} = a_0 + \frac{a_2}{2} - \frac{\frac{a_1^2}{2}}{Y + a_0} = \frac{a_0^2 + \frac{a_0 a_2}{2} + \left(a_0 + \frac{a_2}{2} \right) Y - \frac{a_1^2}{2}}{Y + a_0}. \quad (22)$$

5. DRUGIE PRZYBLIŻENIE ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ

Drugie przybliżenie na napięcie U_2 dostaniemy rozwiązując równanie różniczkowe kształtu (3). W naszym przypadku będziemy mieli

$$C \dot{u}_{2II} + \left(g + g_1 \frac{\Theta}{\pi} \right) u_{2II} = \left[g_1 \frac{\Theta}{\pi} - g(t) \right] u_{2I}. \quad (23)$$

Podstawiając do (23) wartość $g(t)$ z (11) oraz u_{2I} z (17), otrzymamy

$$C \dot{u}_{2II} + \left(g + g_1 \frac{\Theta}{\pi} \right) U_{2II} = \left(g_1 \frac{\Theta}{\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \cdot$$

$$\frac{mU}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j[(n+1)\omega + \Omega]t}}{j[(n+1)\omega + \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \frac{e^{j[(n-1)\omega - \Omega]t}}{j[(n-1)\omega - \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{j[(n+1)\omega - \Omega]t}}{j[(n+1)\omega - \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} + \frac{e^{j[(n-1)\omega + \Omega]t}}{j[(n-1)\omega + \Omega]C + g_1 \frac{\Theta}{\pi} + g} \right\}. \quad (24)$$

Pamiętamy, że poszukiwana wielkość u_{2II} powinna zawierać jedynie składniki stanu ustalonego o pulsacji Ω . W tym celu wystarczy rozwią-

zać równanie uproszczone, w którym prawa strona będzie zawierała jedynie składniki o pożądanej pulsacji Ω ; z drugiej zaś strony występująca w mianownikach mnożnika prawej strony równania admitancja $j\omega C + g_i \frac{\theta}{\pi} + g$ osiąga wartość minimalną dla $\omega = \Omega$. W związku z tym ograniczamy się tylko do tych składników, dla których $\omega = \Omega$, to znaczy do drugiego i czwartego składnika U_{21} dla $n = 1$. W tym jednak przypadku winniśmy wybrać z $g(t)$ jedynie składnik stały równy $a_0 = g_i \frac{\theta}{\pi}$, co prowadzi do wniosku, że przy wprowadzonych powyżej uproszczeniach jest $U_{2II} \approx 0$.

6. WNIOSKI

Uzyskane wyniki na sprawność detekcji (16) i admitancję wejściową (22) są identyczne z wynikami uzyskanymi przez Haantjesa i Tellegena [1] oraz przez Rothe'go i Kleena [3] inną drogą.

W związku z powyższym nasuwają się następujące wnioski:

1. Metoda przybliżonego rozwiązania równania różniczkowego daje wyniki poprawne i to, jak się wydaje, przy mniejszym nakładzie pracy.
2. Obie metody (to znaczy opisana i metoda użyta w [1]) wydają się być właściwe sobie równoważne wobec zupełnej zgodności wyników osiągniętych, z tą jednak różnicą, że metoda omówiona posiada potencjonalnie cechy większej ogólności.

WYKAZ LITERATURY

1. Haantjes I., Tellegen B. D. H.: *The diode as converter and as detector*. Philips Research Reports, Vol. 2, nr 6, Dec. 1947, s. 401—419.
2. M. Kwapisz, *Zeszyty Naukowe Pol. Gdańsk*. nr 3, 1959.
3. Rothe H., Kleen W.: *Elektronenröhren als Schwingungserzeuger und Gleichrichter*. Akad. Verlagsgesell. Leipzig 1941.
4. Schelkunoff S. A.: *Solution of linear and slightly non linear differential equations*. Quart. of Appl. Math. Vol. III, nr 4, 1946, s. 348.
5. Zadeh L. A.: *Frequency analysis of variable networks*. PIRE, March 1950, s. 291.

АНАЛИЗ ДИОДНОГО ДЕТЕКТОРА КАК ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Резюме

Анализ систем с периодически переменными параметрами прост и общеизвестен для чисто омических элементов. С другой стороны однако неизвестно общее решение вопроса при наличии в элементах емкости и индуктивности.

В обсуждаемой работе рассчитаны выходные напряжения для диодного детектора (рис. 1 и 2) путем приближенного решения дифференциального уравнения, представляющего динамическое равновесие системы

$$C\dot{U}_2 + [g + g(t)]U_2 = mU \cos \Omega t \cos \omega t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$

где $g(t)$ проводимость периодически переменная во времени.

Решение уравнения произведено по методу, упомянутому Задеком в [5]. Первое приближение решения согласно этому методу является решением стационарного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$C\dot{U}_2 + \left(g + g_0 \frac{\omega}{\pi}\right)U_2 = \frac{mU}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{ \cos [(n-1)\omega + \Omega]t + \cos [(n-1)\omega - \Omega]t + \\ + \cos [(n+1)\omega - \Omega]t + \cos [(n+1)\omega + \Omega]t \}$$

где $g_0 = \frac{\omega}{\pi}$ среднее значение во времени, $g(t) = a_0$.

По этому уравнению мы рассчитаем комплексную амплитуду U_2 стационарной составляющей с пульсацией Ω

$$U_2 = mU \frac{a}{a_0 Y}$$

где $Y = j\Omega C + g$.

Полученный результат тождествен с полученным в [1] по другому методу

В связи с вышеуказанным можно вывести заключение, что во первых обсуждаемый метод приближенного решения дифференциального уравнения даст правильные результаты при меньшей затрате труда, а во вторых — оба метода кажутся по существу эквивалентными.

ANALYSIS OF DIODE DETECTOR AS OF A VARIABLE PARAMETER CIRCUIT

Summary

The analysis of circuits with periodically varying parameters is simple and commonly known in use for purely ohmic elements. On the other hand the general solution of the case when there the capacitance and inductance energe is unknown

In the present paper the input voltage of the diode detector (Figs. 1 and 2) has been determined by resolving of differential equation expressing the dynamic balance of circuit, with the aid of approximate method

$$C\dot{u}_2 + [g + g(t)]u_2 = -mu \cos \Omega t \cos \omega t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t,$$

where

$g(t)$ — conductance periodically varying in time.

The solution of this equation was carried out with the method cited by Zadehs [5].

According to this method the first approximation of solution is the solution of the following differential equation with constant coefficients

$$C\dot{U}_2 + \left(g + g_0 \frac{\omega}{\pi}\right)U_2 = \frac{mU}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{ \cos [(n+1)\omega + \Omega]t + \cos [(n-1)\omega - \Omega]t + \\ + \cos [(n+2)\omega - \Omega]t + \cos [(n-1)\omega + \Omega]t \}.$$

where

$g_i \frac{\epsilon}{\pi}$ — mean time value of $g(t) = a_0$.

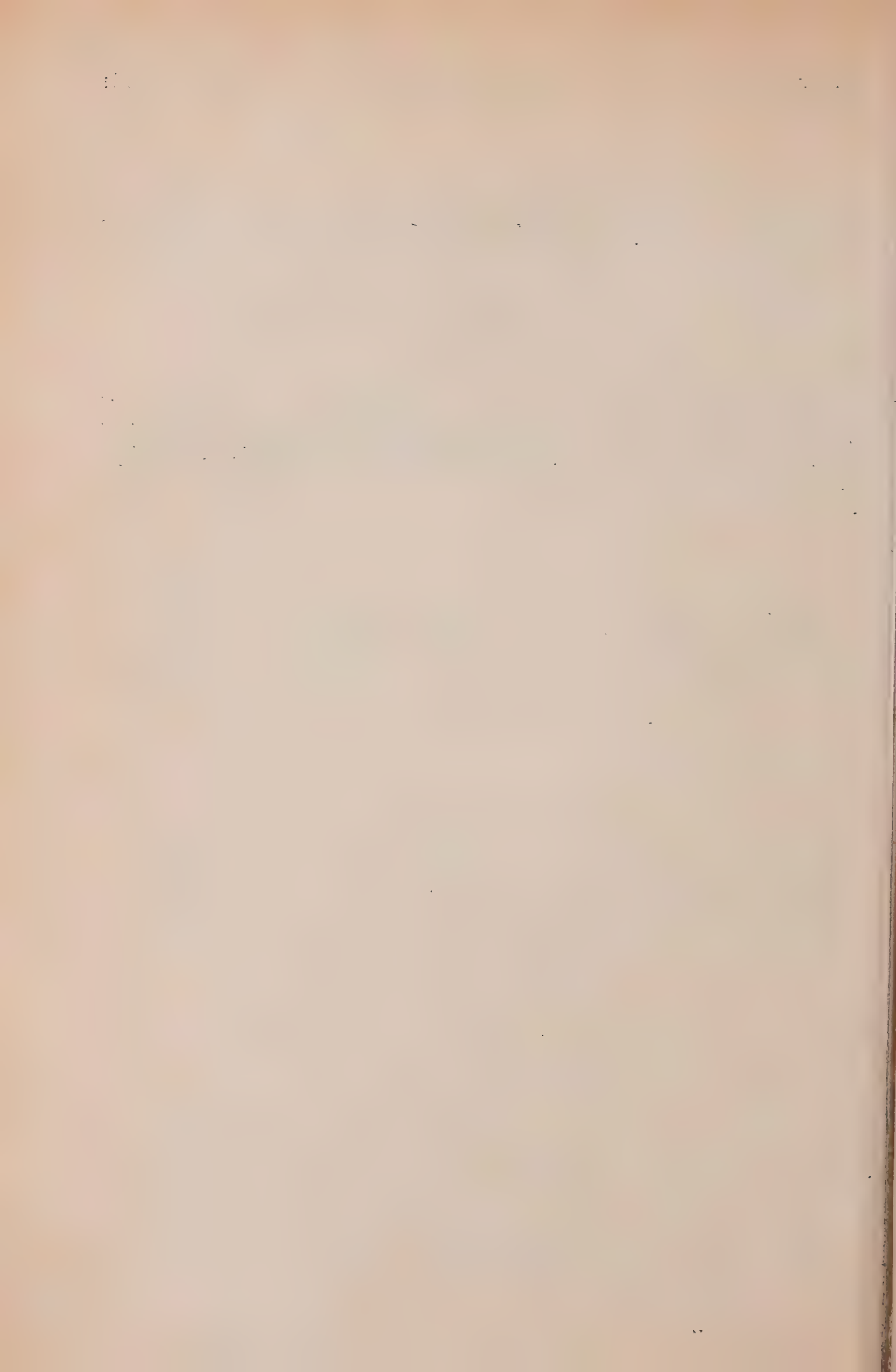
From this equation the complex amplitude U_2 of steady state component with pulsation Ω may be determined

$$U_2 = mU \frac{\frac{a_1}{2}}{a_0 + Y}.$$

where

$$Y = j\Omega c + g.$$

The result obtained is identical with that determined [1] by other method. Due to this fact the following conclusion may be deduced. Firstly, the discussed method of approximate solution of the differential equation provides satisfactory results and is less time consuming; secondly, both methods seem to be equivalent to each other.



621.319.51.001.2

J. BADER

Eksperymentalne badania oporności połukowej iskierników o małych odstępach

Rękopis dostarczono 2. 6. 1958

Opisano opracowany układ do pomiaru oporności kanału połukowego iskierników o małych odstępach. Przytoczono wyniki pomiarów oporności kanału połukowego iskierników odgromnikowych. Omówiono wpływ oporności kanału połukowego na rozkład napięcia na wielokrotnym iskierniku odgromnikowym.

1. WSTĘP

Rozkład napięcia na słupie złożonym z szeregowo połączonych iskierników o małych odstępach — tzw. iskierniku wielokrotnym odgromnika, zależy od parametrów tych iskierników. Dla iskierników posiadających jedynie sterowanie pojemnościowe rozkład ten zależy od pojemności własnych i doziemnych każdego iskiernika, dla iskierników posiadających dodatkowo sterowanie oporowe zależy ponadto od oporności oporników bocznikujących poszczególne iskierniki. Takie przedstawienie zagadnienia jest słuszne dla przypadku niezakłóconego gazu znajdującego się w iskiernikach, co ma miejsce przed zadziałaniem odgromnika. Po jego zadziałaniu w iskierniku odgromnikowym powstaje na pewien czas kanał połukowy, którego oporność jest o wiele rzędów niższa od oporności gazu nie zakłóconego. Oporność tego kanału stanowi dodatkową stałą, która może wpływać na rozkład napięcia w iskierniku wielokrotnym podczas narastania na nim napięcia powrotnego.

Dane w literaturze dotyczące oporności połukowej iskierników o małych odstępach są bardzo szczupłe. Pewne wartości podaje Bałygin [1]. Na podstawie pomiarów obliczył on następujące oporności połukowe występujące po prądzie udarowym o bardzo małych wartościach szczytowych, dla czasu połukowego równego zeru:

60 Ω przy odstępie iskiernika równym 0,2 mm.

ok. 1,5 k Ω przy odstępie 0,5 mm i

ok. 15 k Ω przy odstępie 1 mm.

Ze wzrostem czasu połukowego oporności te szybko rosną i dla czasu równego 300 μ s przyjmują odpowiednio wartości 1,5 k Ω , 8 k Ω i 150 k Ω .

Oporności oporników stosowanych do sterowania rozkładu napięcia na wielokrotnych iskiernikach odgromnikowych są zwykle rzędu $10^5 + 10^7 \Omega$, a więc są znacznie większe od podanych przez Bałygina wartości oporności kanału występującego przy małych czasach połukowych.

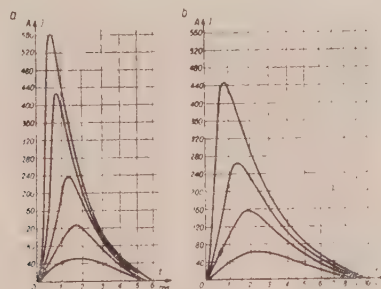
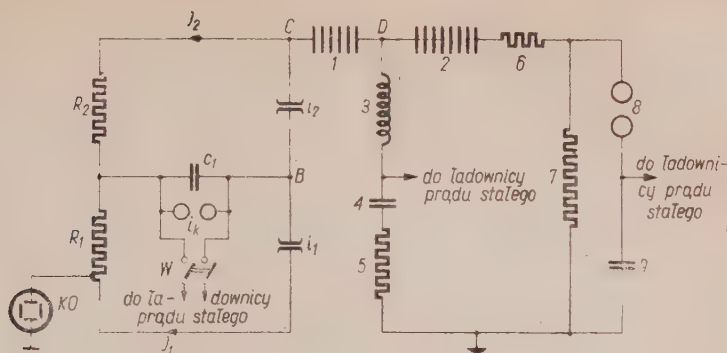
Bałygin podejmuje nawet próbę związania wytrzymałości powrotnej iskierników z prądem połukowym; podane przez niego krzywe wskazują, że ze wzrostem prądu połukowego występującego przed powtórny zapłonem maleje wytrzymałość powrotna. Na podstawie analizy oscylogramów stwierdza on jednak, że wytrzymałość powrotna nie jest jednoznacznie określona przez ilość jonów znajdującą się w przestrzeni międzyelektrodowej iskiernika, a więc i przez wartość prądu połukowego.

Badania oporności połukowej iskierników o małych odstępach są ważne z punktu widzenia gaszenia prądu przez odgromniki zaworowe. Mogą też one być przydatne do dalszego pogłębienia znajomości mechanizmu dejonizacji iskierników. Te względy były powodem opracowania specjalnego układu pomiarowego, a następnie przeprowadzenia obszernych badań oporności połukowej iskierników, których wyniki są podane w niniejszej pracy. Badania te były prowadzone głównie w warunkach odpowiadających warunkom występującym w odgromnikach zaworowych: przez iskiernik przepuszczano prądy udarowe i po nich następce typu $\sin^{1/\alpha} \omega t$ przy $\alpha < 1$.

2. UKŁAD DO BADANIA OPORNOŚCI KANAŁU POŁUKOWEGO

Opracowanie układu do pomiaru oporności kanału połukowego (oporności połukowej) jest tym trudniejsze, im większe są prądy następce w stosunku do prądów połukowych (np. prądy następce rzędu setek lub tysięcy amperów, połukowe zaś rzędu mikroamperów). Przy dużych prądach następczych nie można stosować w obwodach lamp elektronowych, które mogłyby skutecznie odcinać w czasie pomiaru prądu połukowego, badany iskiernik od źródeł prądu udarowego i następczego. Poza tym duże prądy następce powodują zakłócenia w układach pomiarowych przystosowanych do pomiarów małych prądów połukowych. Dołączenie iskiernika badanego do źródła prądu możliwe jest jedynie za pomocą iskierników dodatkowych, które, niestety, po przeminięciu prądu następczego mają własną oporność połukową i nie odcinają iskiernika badanego od części obwodu mogącej wprowadzać zakłócenia.

Po wielu próbach, autor niniejszej pracy opracował układ, w którym trudności te dały się usunąć. Schemat tego układu uwidocznił na rys. 1. W układzie tym generator udarów oraz układ do wytworzenia prądu następczego są analogiczne jak w układzie opracowanym do pomiarów wytrzymałości powrotnej [2].



Rys. 1. Schemat do pomiaru oporności kanału połukowego. 1 — iskiernik odcinający, 2 — iskiernik synchronizujący, 3 — dławik do regulacji kształtu prądu następczego, 4 — kondensator (źr. prądu następczego), 5 — opornik do pomiaru prądu następczego, 6 — opornik rozładowujący g. n., 7 — opornik stabilizujący, 8 — iskiernik włączający g. n., 9 — kondensator główny g. n., i_1 , i_2 — badane jednakowe iskierniki, R_1 , R_2 — oporniki o jednakowej oporności, C_1 — kondensator (źr. prądu stałego), W — wyłącznik, KO — oscylograf katodowy, i_k — iskiernik kontrolny.

Iskiernik pomocniczy i_2 zbudowany jest identycznie jak iskiernik badany i_1 : z tego samego materiału, o tym samym kształcie i odstępach oraz o tej samej pojemności. Źródłem napięcia stałego jest kondensator C_1 , który po naładowaniu, na czas pomiaru, jest odłączony od ładownicy za pomocą wyłącznika W . Ma to na celu zmniejszenie szkodliwych wpływów pojemności i oporności poszczególnych elementów ładownicy, które mogłyby bocznikować opornik R_1 lub iskiernik i_1 . Wartość pojemności kondensatora C_1 dobrana musi być tak, aby w czasie przepływu prądu (udarowego i następczego) przez iskierniki i_1 i i_2 można było traktować C_1 jako źródło napięcia stałego, np. z dokładnością 5%. To znaczy w przybliżeniu,

$$\frac{R_1 C_1}{2} > 20 T,$$

gdzie T jest to całkowity czas przepływu prądu przez iskierniki i_1 i i_2 . Wybór R_1 jest uzależniony od zakresu czasu, w którym chce się pomierzyć oporność kanału połukowego przerwy. Przy dobrze zestawionym układzie można zmierzyć oporność kanału połukowego w zakresie od $0,2 R_1$ do $10 R_1$ (oczywiście najdokładniejsze pomiary w środku przedziału). Układ zestawia się zawsze tak, aby $R_1 = R_2$. W ten sposób, przy jednakowym przebiegu czasowym oporności kanałów połukowych w iskiernikach i_1 i i_2 , w punkcie C układu panuje podczas pomiaru potencjał równy potencjałowi ziemi (0).

Ponieważ po przeminieciu prądu udarowego i prądu następczego w punkcie D układu istnieje także potencjał w przybliżeniu równy potencjałowi ziemi, przez iskiernik odcinający 1 prąd nie płynie i można przyjąć, że część układu z iskiernikiem badanym jest odcięta od reszty, w której są źródła prądu. Dzięki temu stosunkowo łatwo przeprowadzić pomiar prądu połukowego w funkcji czasu za pomocą oscylografu katodowego.

Prąd ten

$$I_1 = U \frac{1}{R_1 + r_1} \quad (1a)$$

w oporności kanału połukowego można obliczyć w prosty sposób ze wzoru

$$r_1 = R_1 \left(\frac{I_m}{I_1} - 1 \right), \quad (1b)$$

gdzie I_m — wartość prądu przy zwartym iskierniku i_1 ,

I_1 — wartość prądu po czasie, po którym oblicza się oporność kanału połukowego.

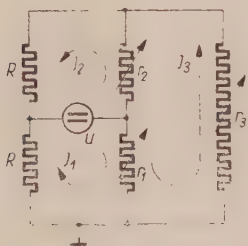
Oczywiście przedstawiony powyżej przebieg obliczeń jest wyidealizowany. Należy zwrócić uwagę na dodatkowe okoliczności, jak różne kierunki prądu stałego w iskiernikach i_1 i i_2 w stosunku do kierunków prądu następczego, różne oporności kanałów połukowych iskierników i_1 i i_2 wywołane rozrzutami oraz parazytowe pojemności oscylografu i iskierników. Okoliczności te zmieniają sposób obliczenia oporności połukowej w stosunku do (1b) oraz mogą być źródłem błędów. Poniżej zostaną one szczegółowo omówione.

Przypadek A. Jeśli biegunowości poszczególnych źródeł dobrane w ten sposób że w iskierniku I_1 prąd stały z kondensatora C_1 ma przeciwny kierunek do prądów następczego i udarowego (co ma miejsce w układach praktycznych z iskiernikami wielokrotnymi), to w iskierniku I_2 kierunki prądów: stałego oraz następczego i udarowego będą zgodne. Wykonano szereg pomiarów przy opornikach $R_1 = R_2 = 15,4 \text{ M}\Omega$ oraz $R_1 = R_2 = 0,1 \text{ M}\Omega$

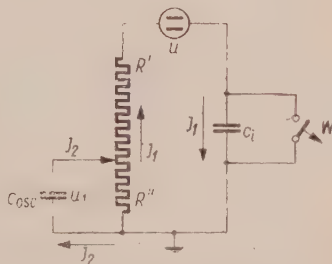
przy stałych kierunkach prądu udarowego i następczego oraz różnych kierunkach prądu stałego. Nie stwierdzono jednak przy tym istotnych różnic w wartości prądu $I_1=f(t)$. Z tego względu nie ma podstaw, aby sądzić, że ta okoliczność mogła mieć istotny wpływ na dokładność pomiaru.

Przypadek B. Drugą istotną okolicznością jest fakt możliwości występowania dużych rozrzutów prądów połukowych w iskiernikach i_1 i i_2 , szczególnie w niektórych zakresach pomiarowych. W tych przypadkach $I_1=f(t)$ różni się od $I_2=f(t)$ i w punkcie C układu potencjał jest różny od potencjału ziemi; przez iskiernik odcinający 1 płynie więc pewien prąd, który zniekształca wyniki pomiarowe. Okoliczność ta nie jest przyczyną błędów przy poszukiwaniu wartości średniej prądu połukowego $I_1=f(t)$, gdyż można przyjąć, że wywołane nierównościami prądów odchylenia dodatnie i ujemne są jednakowo częste. Jak wykazują obliczenia, także w przypadku jednego pomiaru duże różnice prądów połukowych $I_1=f(t)$ i $I_2=f_2(t)$ nie są źródłem dużych błędów.

Rozważmy układ zastępczy uwidoczniony na rys. 2. W układzie tym R — to dla oporności R_1 i R_2 z rys. 1 (oporniki szeregowo połączone z przer-



Rys. 2. Układ zastępczy do obliczania błędów wynikających z różnych oporności kanałów połukowych.



Rys. 3. Układ zastępczy do obliczania błędów wynikających z pojemności oscylografu.

wami iskrowymi), r_1 i r_2 — oporności kanałów połukowych, r_3 — oporność połukowa iskiernika odcinającego (iskiernika 1 z rys. 1). U — źródło napięcia stałego. Dla tego układu można napisać:

$$I_1 R + I_1 r_1 + I_3 r_1 = U, \quad (2)$$

$$I_2 R + I_2 r_2 - I_3 r_2 = U, \quad (3)$$

$$I_3 r_3 + I_2 R - I_1 R = 0. \quad (4)$$

Z równań tych można znaleźć prąd I_1 mierzony za pomocą oscylografu

$$I_1 = U \cdot \frac{1}{R + r_1 + \frac{r_3 r_2}{R + r_2}} \quad (5)$$

Łatwo jest zauważyć, że gdy $r_1 = r_2 = r$, wzór przybiera postać odpowiadającą równaniu (1a).

Ponadto z równań 2, 3 i 4 można określić prąd płynący przez oporność r_1

$$I_1 + I_3 = I_1 + I_1 \cdot \frac{R + r_2}{r_3 + \frac{r_3 r_2}{R} + r_2} = \frac{U}{r_3 + \frac{r_3 r_2}{R} + r_2} \quad (6)$$

Uchyb względny ΔI_1 równy jest różnicy między prądem przepływającym przez oporność połukową r_1 a prądem mierzonym za pomocą oscylografu, podzielonej przez prąd mierzony za pomocą oscylografu

$$\Delta I_1 = \frac{I_1 + I_3 - I_1}{I_1} 100 = \frac{I_3}{I_1} 100\% \quad (7)$$

W celu zorientowania się w wartościach uchybów występujących przy poszczególnych pomiarach, w których do obliczeń oporności r_1 zamiast rzeczywistego prądu $I_1 + I_3$ brano prąd I_1 przeprowadzono przeliczenie. W przeliczeniu tym przyjęto następujące warunki:

$$r_2 = b r_1 \quad \text{przy} \quad b > 1, \quad \text{zaś} \quad r_3 = r_1,$$

tzn. że oporność kanału połukowego iskiernika odcinającego zawsze osiąga wartość mniejszej oporności połukowej, w tym przypadku równej oporności połukowej iskiernika badanego.

Podstawiając te założenia do (2), (5) i (7) uchyb ΔI_1 wyrazimy zależnością

$$\Delta I_1 = \frac{R(b-1)}{R(2+b) + r_1 b} \cdot 100.$$

Uchyb ΔI_1 jest tym większy, im r_1 ma wartość mniejszą, a więc przy małych czasach połukowych jest większy niż przy dużych czasach. Dla $r_1 = 0$ osiąga wartość maksymalną

$$\Delta I_{1 \max} = \frac{b-1}{b+2} \cdot 100.$$

Zakładając, iż w tym samym czasie oporności kanałów połukowych iskierników i_1 i i_2 nie różnią się więcej niż o 100% ($b=2$), maksymalny uchyb można określić na 25%.

Uchyb ΔI_1 można zmniejszyć w istotny sposób zwiększając oporność r_3 . W niniejszej pracy iskiernik 1 w układzie z rys. 1 stosowano w postaci trójelektrodowej, a niekiedy nawet pięcioelektrodowej.

Uwzględniając otrzymane w pomiarach małe rozrzuty pomiarowe ($b=1,5$), uchyb $\Delta I_{1\max}$ w jednym pomiarze r_1 spowodowany prądem I_3 należy oszacować na nie większy od $\pm 20\%$.

Przypadek C. Trzecią ważną okolicznością w opracowanym układzie jest zagadnienie pojemności płyt oscylograficznych łącznie z pojemnością przewodów doprowadzających. Do rozważenia tego zagadnienia przyjęto schemat podany na rys. 3.

W czasie przepływu prądu następczego iskiernik jest praktycznie zwarty (na rys. 3 wyłącznik W zamknięty). W tym czasie przez iskiernik badany płynie prąd i pojemność oscylografu wraz z przewodami doprowadzającymi C_{osc} ładuje się do napięcia $\frac{U_1}{U} = \frac{R''}{R + R''}$. Po przeminięciu prądu następczego zgromadzony na pojemności C_{osc} ładunek powoduje błąd pomiaru. Błąd ten jest niewątpliwie tym większy, im szybciej zmienia się mierzone napięcie na iskierniku badanym. Ponieważ przebiegi napięcia na iskierniku badanym są różne, zależą od oporności kanału połukowego iskiernika i jego pojemności, należałoby dla każdego przypadku ten błąd obliczać, co oczywiście byłoby zbyt pracochłonne. Niewątpliwie, w przypadku pomiaru prądu połukowego napięcie na iskierniku narasta wolniej niż w układzie uwidocznionym na rys. 3 po otwarciu wyłącznika, a to ze względu na brak oporności połukowej. Przeprowadzając obliczenie błędu w układzie z rys. 3 otrzymano ostrzejszy wynik niż w rzeczywistości. Korzystając z przekształcenia Laplace'a można napisać

$$\left(R' + R'' - \frac{1}{C_i S}\right) I_1 + R'' \cdot I_2 = \frac{U}{S}, \quad (8)$$

$$R'' I_1 + \left(R'' + \frac{1}{C_{osc} S}\right) I_2 = \frac{U_1}{S}. \quad (9)$$

Z równań tych oblicza się

$$U_1 = U \left[\frac{1}{S} - \frac{R''}{(R' + R'') R' R'' C_i C_{osc}} \cdot \frac{1}{S(S - S_1)(S - S_2)} \right], \quad (10)$$

gdzie

$$S_1 = - \left(\frac{1}{R'' C_{osc}} + \frac{1}{R' C_i} + \frac{1}{R' C_{osc}} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{R'' C_{osc}} + \frac{1}{R' C_i} + \frac{1}{R' C_{osc}} \right)^2 - 4 \frac{1}{R' R'' C_i C_{osc}}}, \quad (11)$$

$$S_2 = \frac{-\left(\frac{1}{R''C_{osc}} + \frac{1}{R'C_i} + \frac{1}{R'C_{osc}}\right)}{2} - \frac{V\left(\frac{1}{R''C_{osc}} + \frac{1}{R'C_i} + \frac{1}{R'C_{osc}}\right)^2 - 4\frac{1}{R'R''C_iC_{osc}}}{2} \quad (12)$$

Korzystając z tablic na odwrotne przekształcenie Laplace'a otrzymujemy

$$U_1(t) = U \frac{R''}{R' + R''} \left(\frac{S_2}{S_2 - S_1} e^{+S_1 t} - \frac{S_1}{S_2 - S_1} e^{+S_2 t} \right), \quad (13)$$

gdzie S_1 i S_2 według wzorów (11) i (12).

Przy pomiarach oporności kanału połukowego występowały między innymi następujące konkretne wartości:

pojemność oscylografu wraz z doprowadzeniami $C_{osc} = 25$ pF.

pojemność iskiernika $C_i = 75$ pF i mniejsze wartości,

$R' + R'' = 15,4$ MΩ.

Dla stosowanych w pomiarach wartości można obliczyć:

R''	=	1,12	3,44	6,58	MΩ
R'	=	14,3	12,0	8,8	MΩ
S_1	=	- 0,865	- 0,87	- 0,815	1/ms
S_2	=	-38,5	-16,4	-11,3	1/ms
$\frac{S_2}{S_2 - S_1}$	=	1,02	1,06	1,08	
$\frac{S_1}{S_2 - S_1}$	=	0,023	0,056	0,078	

$$\text{dla } t = 0,5 \text{ ms} - e^{+S_1 \cdot 0,5} \quad 0,5 \cdot 10^{-8} \quad 0,28 \cdot 10^{-3} \quad 0,38 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{dla } t = 0,5 \text{ ms} - \frac{S_1}{S_2 - S_1} e^{+S_2 \cdot 0,5} \quad 1,1 \cdot 10^{-10} \quad 1,4 \cdot 10^{-5} \quad 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{dla } t = 0,5 \text{ ms} - e^{+S_1 \cdot 0,5} \quad 0,65 \quad 0,65 \quad 0,67$$

$$\text{dla } t = 0,5 \text{ ms} - \frac{S_2}{S_2 - S_1} e^{+S_2 \cdot 0,5} \quad 0,66 \quad 0,69 \quad 0,72$$

Z powyższych przeliczeń wynika, że dla przyjętych w układzie wartości poszczególnych stałych i czasu $t \geq 0,5$ ms

$$\frac{S_2}{S_2 - S_1} e^{+S_1 t} \gg \frac{S_1}{S_2 - S_1} e^{+S_2 t} \quad (14)$$

wzór (13) można zatem przedstawić w następującej postaci uproszczonej

jako

$$U_1(t) \approx U \frac{R''}{R' + R''} \cdot \frac{S_2}{S_2 - S_1} e^{+S_1 t}, \quad (15)$$

Jeśli by przyjąć $C_{osc} = 0$, to wzór na U_1 miałby postać

$$U_1(t) = U \frac{R''}{R' + R''} e^{-\frac{t}{(R' + R'') C_1}}, \quad (16)$$

a dla przyjętych wyżej wartości liczbowych byłoby

$$\frac{1}{(R' + R'') C_1} = 0,867 \frac{1}{ms}.$$

Wartość ta dość dobrze odpowiada wartości S_1 podanej powyżej przy opornościach R'' równej 1,12 i 3,44 MΩ, natomiast jest większe od wartości S_1 przy $R'' = 6,58$ MΩ.

Z porównania wyżej przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że w miarę wzrostu stosunku $\frac{R''}{R'}$ wzrasta błąd wprowadzony pojemnością C_{osc} .

Dla stosowanych $R'' = 1,12$ i 3,44 MΩ, błąd ten jest pomijalny.

Powyższe przeliczenie wykonano dla pojemności iskiernika badanego $C_1 = 75$ pF. Przy mniejszych pojemnościach stosowanych w próbach ($C_1 = 15$ pF) błąd ten obliczony powyższą metodą jest większy niż w rzeczywistości. Można liczyć, że nadwyżka w oszacowanym błędzie przy pojemności $C_{osc} = 75$ pF przynajmniej częściowo pokryje jego zwiększenie przy zmniejszeniu się pojemności C_{osc} .

Przypadek D. Czwartą ważną okolicznością w opracowanym układzie jest zagadnienie pojemności własnej badanego iskiernika, której pominąć tak jak poprzednich okoliczności nie można.

W celu obliczenia prądu połukowego lub oporności kanału połukowego, konieczne jest od sumarycznego prądu odejmowanie prądu pojemnościowego. I tak prąd połukowy dla dowolnego czasu równy jest

$$I = I_{1t} + C_1 R \frac{dI_{1t}}{dt}, \quad (17)$$

gdzie: I_{1t} — jest to wartość chwilowa prądu zmierzonego za pomocą oscylografu,

C_1 — pojemność badanego iskiernika,

R — oporność szeregową z badanym iskiernikiem,

$\frac{dI_{1t}}{dt}$ — pochodna prądu zmierzonego za pomocą oscylografu w punkcie I_{1t} ,

zaś oporność kanału połukowego dla dowolnego czasu równa jest

$$r = \frac{R(I_m - I_{1t})}{I_1 + C_i R \frac{dI_{1t}}{dt}}, \quad (18)$$

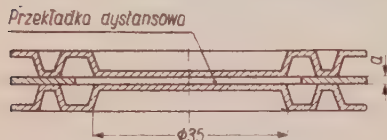
gdzie I_m — wartość maksymalna prądu (przy zwartym iskierniku badanym), pozostałe oznaczenia jak wyżej.

Pomiar pojemności iskiernika C_i za pomocą mostków, wskutek wprowadzenia dodatkowych przewodów do układów, byłby obciążony znacznym błędem. Z tego powodu pomiar pojemności przeprowadzono oscylograficznie. W układzie z rys. 1 ładowano kondensator C_1 do napięcia nieco niższego od napięcia zapłonowego iskierników i_1 i i_2 . Następnie zbliżano iskiernik kontrolny i_k do czasu uzyskania na nim przeskoku. Za pomocą oscylografu KO wykonywano zdjęcia prądu rozładowania pojemności iskiernika i_1 . Na podstawie tych pomiarów obliczano pojemność C_i .

Podane (w punktach *B, C, D*) wzory pozwalają na dość dokładne określenie oporności kanału połukowego w każdej próbie. Obliczone w tym rozdziale wartości liczbowe są typowe, pozwalają na zorientowanie się w wartościach błędów w przypadku nieuwzględnienia ścisłych danych. Przytoczone w niniejszej pracy wyniki pomiarów oporności kanału połukowego iskierników oparte są na około 1000 oscylogramach prądów połukowych, wykonanych w różnych warunkach. Wobec tak dużej liczby pomiarów niemożliwe było (ze względu na pracochłonność) przeliczenie liczbowe wartości błędu dla każdego konkretnego przypadku. Wartość błędu charakteryzują przeprowadzone obliczenia typowe.

3. WYNIKI POMIARÓW

Pomiary oporności kanału połukowego przeprowadzono na iskiernikach odgromnikowych (rys. 4) wykonanych z blachy mosiężnej.



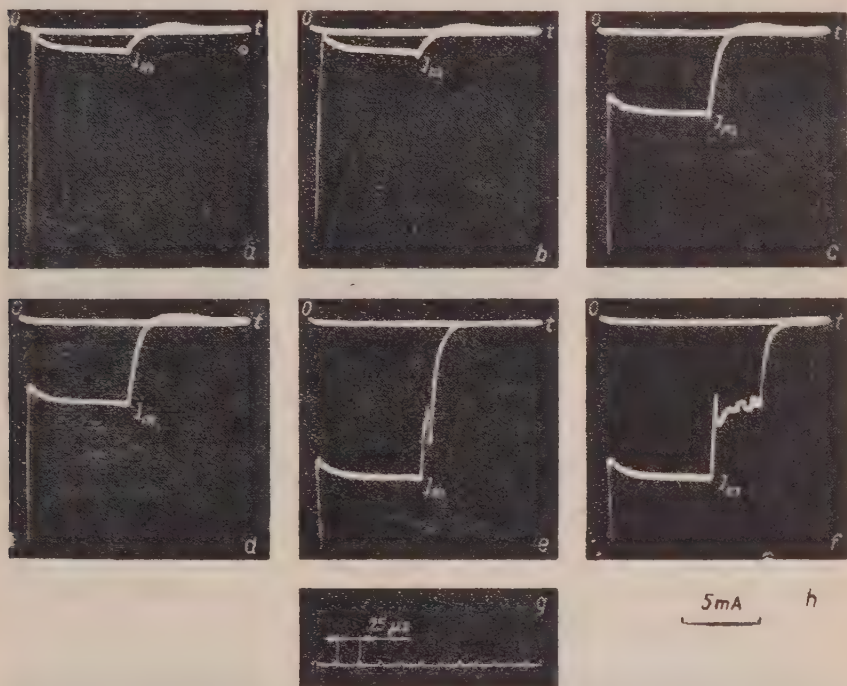
Rys. 4. Iskiernik badany (z bieżącej produkcji odgromników).

Pierwsza seria pomiarów miała na celu pomiar oporności kanału połukowego, stworzonego przez uder prądowy. W tym celu w układzie z rys. 1 wyłączono zasilanie kondensatora 4 stanowiącego źródło prądu następczego. Generator uderów ustawiono tak, aby wytwarzał udary

prądu o wartości szczytowej 4 kA i o kształcie ok. 10 25 μ s. Oporniki określające zakres pomiaru były: $R_1 = R_2 = 0.1 \text{ M}\Omega$, kondensator (źródło napięcia stałego) miał pojemność $C_1 = 36 \mu\text{F}$. Pomiar wykonano na iskiernikach o odstępach ok. 0.3, 0.6 i 1.2 mm przy napięciu stałym

na kondensatorze C_1 w zakresie 100 do 1000 V. W jednakowych warunkach pomiarowych wykonywano przeciętnie 10 oscylogramów.

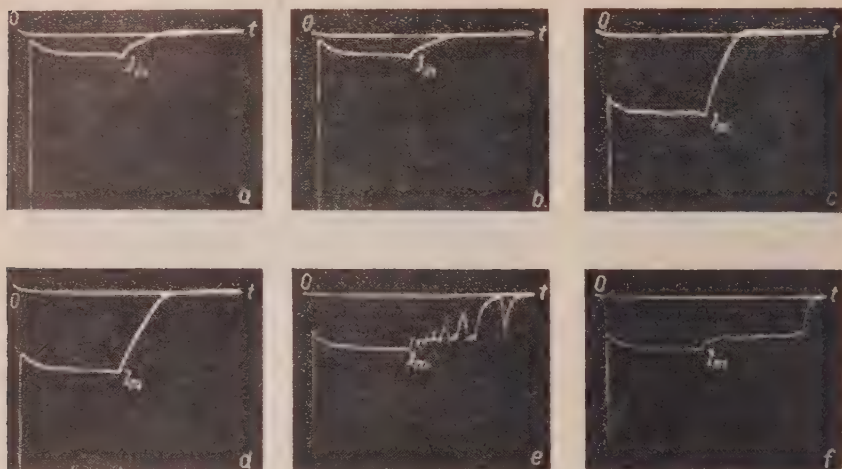
Na rysunku 5 przedstawiono typowe oscylogramy prądu otrzymane przy badaniu iskiernika o odstępzie ok. 0,3 mm, na rys 6 — otrzy-



Rys. 5. Typowe oscylogramy otrzymane przy badaniu prądu pólukowego płynącego po prądzie udarowym. Odstęp iskiernika $a=0,3$ mm, prąd udarowy 4 kA, 10/25 μ s. Oscylogramy a, b — przy napięciu na kondensatorze C_1 równym ok. 100 V. c, d — przy napięciu ok. 500 V, e, f — przy napięciu ok. 1000 V. Na zdjęciu g skalowanie osi czasu, na rys. h skalowanie osi prądu.

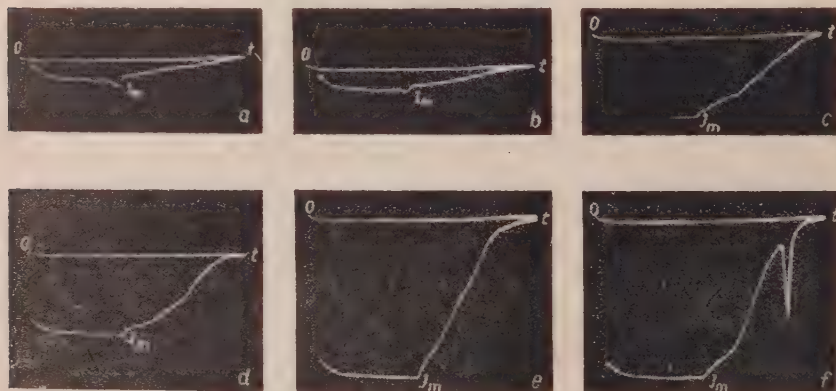
mane przy badaniu iskiernika o odstępzie ok. 0,6 mm, a na rys. 7 — otrzymane przy badaniu iskiernika o odstępzie ok. 1,2 mm. Na oscylogramach wykonanych przy wyższych napięciach stałych widoczne są kolejne zapłony. Na niektórych oscylogramach wykonanych przy niskich napięciach (zwłaszcza przy ok. 100 V) bezpośrednio przed zgaśnięciem łuku (od prądu udarowego) występował wzrost prądu stałego płynącego przez iskiernik. Wzrost ten jest spowodowany wzrostem napięcia łuku przy zmniejszeniu się prądu zwarcowego (udarowego). Napięcie łuku dodaje się do napięcia stałego na kondensatorze C_1 , powodując wzrost prądu stałego. Często przy małym napięciu (100 do 500 V) na C_1 , bezpośrednio po zgaśnięciu łuku w iskierniku, występowało obniżenie

się prądu stałego widoczne na oscylogramach na rys. 5, 6 i 7. Obniżanie się to zachodziło szybciej, niż wynikałoby to ze stałej czasu obwodu



Rys. 6. Typowe oscylogramy otrzymane przy badaniu prądu połukowego płynącego po prądzie udarowym. Odstęp iskiernika $a=0,6$ mm, prąd udarowy 4 kA, 10^{-25} μ s. Oscylogramy a, b — przy napięciu na kondensatorze C_1 równym ok. 100 V, c, d — przy napięciu ok. 500 V, e, f — przy napięciu ok. 1000 V. Skalowanie osi czasu na rys. 5 g osi prądu dla osc. a, b, c, d na rys. 5 h.

(iloczynu oporności szeregowej R_1 w obwodzie i pojemności iskiernika wraz z dodatkowymi pojemnościami równoległymi). W związku z tym

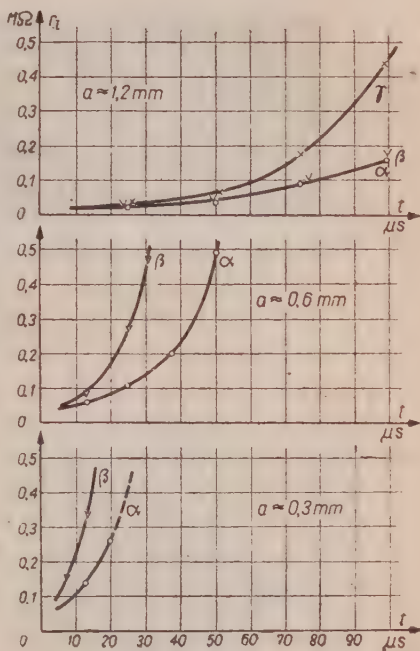


Rys. 7. Typowe oscylogramy otrzymane przy badaniu prądu połukowego płynącego po prądzie udarowym. Odstęp iskiernika $a=1,2$ mm, prąd udarowy 4 kA, 10^{-25} μ s. Oscylogramy a, b — przy napięciu na kondensatorze C_1 równym ok. 100 V, c, d — przy napięciu ok. 500 V, e, f — przy napięciu ok. 1000 V. Skalowanie osi czasu na rys. 5 g, osi prądu na rys. 5 h.

obniżenie się prądu przypisano zmianom napięcia na iskierniku, które są związane z napięciem łuku wywołanym przez prąd udarowy; do obliczeń oporności kanału połukowego, jako wartość maksymalną prądu stałego, przyjmowano najwyższą wartość prądu stałego, występującą bezpośrednio po jego obniżeniu się.

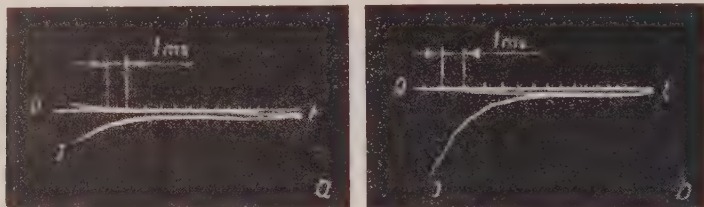
Na podstawie otrzymanych oscylogramów, korzystając z wzoru (18) obliczono oporności kanałów połukowych. Otrzymane wyniki w postaci średnich przedstawione są na rys. 8. Z rysunku tego widać, że oporność kanału połukowego, utworzonego przez prąd udarowy w iskiernikach, w zakresie odstępów 0,3–1,2 mm, zależy od wartości napięcia pomiarowego (a więc i napięcia na kondensatorze C_1). Oporność kanału połukowego iskierników o odstępie ok. 0,3 i 0,6 mm przy zmianie napięcia na kondensatorze C_1 ze 100 V na 500 V w zakresie czasów rzędu kilkudziesięciu mikrosekund znacznie się zwiększyła. Natomiast nie zostało to potwierdzone dla iskiernika o odstępie ok. 1,2 mm. Wynik ten nie wydaje się słuszny. Wyjątkowo w tym przypadku wykonano jedynie 7 oscylogramów, co prawdopodobnie jest przyczyną otrzymania wyników nie odpowiadających największemu prawdopodobieństwu. Wykonane pomiary przy napięciu na C_1 1000 V (rys. 8) potwierdziły wzrost oporności kanału połukowego w miarę wzrostu napięcia pomiarowego także i dla iskiernika o odstępie ok. 1,2 mm.

Ponadto z rys. 8 widać, że oporność kanału połukowego iskiernika o mniejszym odstępie szybciej wzrasta od oporności kanału połukowego iskiernika o większym odstępie. Wartość bezwzględna oporności kanału połukowego — po tym samym czasie połukowym — iskiernika o odstępie ok. 0,3 mm jest większa niż iskiernika o odstępie ok. 0,6 mm, zaś iskiernika o odstępie ok. 0,6 mm jest większa niż iskiernika o odstępie ok. 1,2 mm.



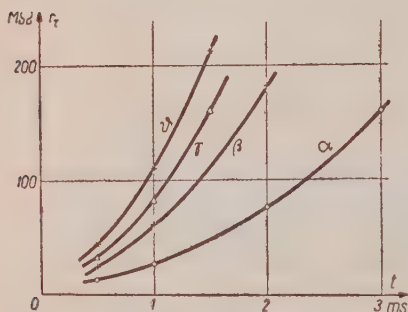
Rys. 8. Oporność kanału połukowego r_t w zależności od czasu połukowego t dla iskierników o odstępie po przejściu przez nich prądu udarowego 4 kA, 10/25 μ s. α — przy napięciu na kondensatorze C_1 równym ok. 100 V, β — przy napięciu ok. 500 V, γ — przy napięciu ok. 1000 V. Oporności $R_1 = R_2 = 0,1$ M Ω .

Druga seria pomiarowa miała na celu zbadanie po dłuższych czasach połukowych oporności kanału połukowego utworzonego przez prąd udarowy. W układzie z rys. 1 zastosowano oporniki $R_1 = R_2$ o wartości 15,4 M Ω każdy, kondensator C_1 o pojemności 8 μF ¹.



Rys. 9. Typowe oscylogramy otrzymane przy badaniu prądu połukowego płynącego po prądzie udarowym. Odstęp iskiernika $a=1,2$ mm, prąd udarowy 4 kA, 10/25 μs . a — przy napięciu na kondensatorze C_1 równym ok. 100 V, b — przy ok. 600 V. (Przy a i b różne dzielniki napięcia).

Generator udarów nastawiono na udary 4 kA, 10/25 μs . Próbnom podano iskiernik o odstępzie ok. 1,2 mm. Typowe oscylogramy otrzymane przy tej próbie przedstawione są na rys. 9. Obliczone na podstawie tych pomiarów wartości oporności kanału połukowego uwidocznione są na



Rys. 10. Oporność kanału połukowego r_t w zależności od czasu połukowego t dla iskiernika o odstępzie $a=1,2$ mm, po przejściu przez niego prądu udarowego 4 kA, 10/25 μs . α — przy napięciu na kondensatorze C_1 równym ok. 600 V, β — przy napięciu ok. 1500 V, γ — przy napięciu ok. 3500 V, θ — przy napięciu ok. 5000 V. Oporności $R_1 = R_2 = 15,4$ M Ω .

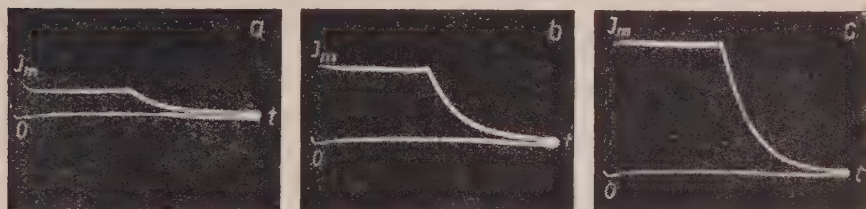
rys. 10. Z pomiarów tych wynika, że także dla dłuższych czasów połukowych (w zakresie 0,5–2 ms) ze wzrostem napięcia na kondensatorze C_1 wzrasta oporność kanału połukowego.

Pomiarów z pierwszej serii nie można w postaci jednego wykresu zestawiać z pomiarami drugiej serii, gdyż przebiegi napięcia pomiarowego na badanej przerwie iskrowej (nawet przy tym samym napięciu na C_1) w obydwu przypadkach nie były jednakowe.

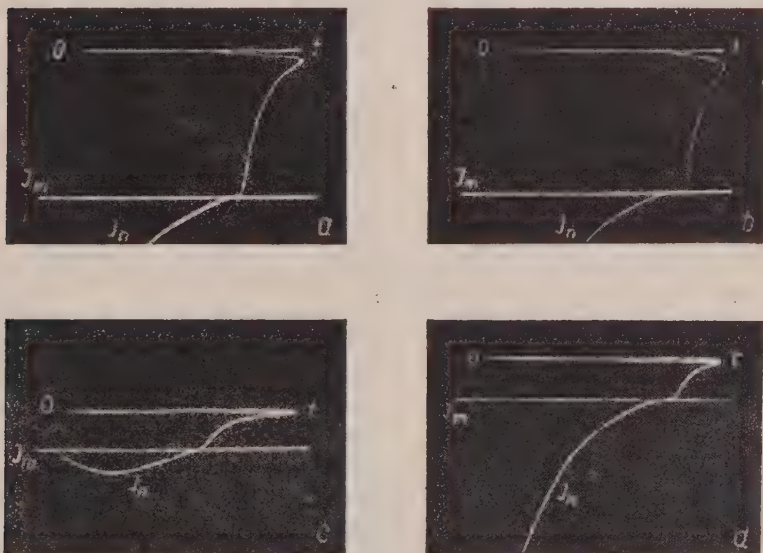
Jeśliby oporność kanału połukowego przyjąć za miernik dejonizacji iskiernika (tak jak czyni to szereg autorów), można by stwierdzić, że zmniejszenie odstępki iskiernika oraz zwiększenie napięcia na nim (oczy-

¹ Ponieważ nie dysponowano dostatecznym asortymentem kondensatorów, stąd w poszczególnych próbach stosowano różne kondensatory tak dobrane, aby był zachowany warunek małej zmiany napięcia na C_1 .

wiecie w pewnych granicach) sprzyja jego dejonizacji. Wniosek pierwszy, dotyczący odstępów iskiernika, jest zgodny z wynikami pomiarów przeprowadzonych przez Bałygina w zupełnie innych warunkach. Wniosek drugi, dotyczący wartości napięcia na iskierniku, nie potwierdza wywodów Iwanowa [3].



Rys. 11. Typowe oscylogramy otrzymane przy badaniu prądu połukowego. Odstęp iskiernika $a=0,3$ mm, prąd udarowy $0,1$ kA, prąd następczy 50 A (ok. 6 ms). Oscylogram d — przy napięciu na kondensatorze C_1 równym ok. 100 V, b — przy napięciu ok. 300 V, c — przy napięciu ok. 600 V. Skalowanie osi czasu jak na rys. 9.

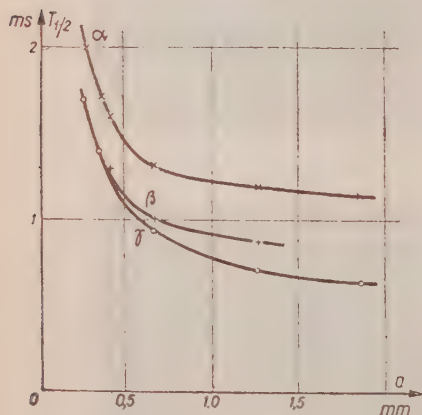


Rys. 12. Typowe oscylogramy przy badaniu prądu połukowego. Prąd udarowy $0,1$ kA, czas trwania prądu następczego I_n ok. 10 ms, a — przy a — $0,6$ mm, napięciu na C_1 ok. 1300 V, I_n — 265 A, b — przy a — $0,6$ mm, napięciu na C_1 ok. 1300 V, I_n — 450 A, c — przy a — $1,2$ mm, napięciu na C_1 ok. 300 V, I_n — 65 A, d — przy a — $1,2$ mm, napięciu na C_1 ok. 300 V, I_n — 450 A. W części dolnej oscylogramów widoczny jest prąd następczy. Linia pozioma I_n określa największą wartość prądu stałego. Skalowanie osi czasu jak na rys. 9.

Jednak wydaje się za przedwczesne traktowanie obecnej chwili oporności połukowej jako miernika dejonizacji iskiernika. Można tylko stwierdzić, że napięcie pomiarowe jest koniecznym parametrem przy definiowaniu oporności połukowej.

Trzecia seria pomiarowa miała na celu pomiar oporności kanału połukowego przy małych prądach udarowych i różnych prądach następczych. W tej serii pomiarowej oporniki $R_1=R_2$ wynosiły $15,4 \text{ M}\Omega$, kondensator o pojemności $C_1=0,25 \text{ }\mu\text{F}$, generator udarów wytwarzał udary o wartości szczytowej $0,1 \text{ kA}$. W serii tej, tak jak i w poprzednich, w jednakowych warunkach wykonywano przeciętnie 10 oscylogramów. Na rys. 11 przedstawiono przykładowe oscylogramy otrzymane przy prądzie następczym o czasie trwania ok. 6 ms, na rys. 12 zaś przy prądzie następczym o czasie trwania ok. 10 ms. Na podstawie otrzymanych oscylogramów można stwierdzić w niektórych przypadkach nieco powolniejszy zanik prądu połukowego (łącznie z pojemnościowym) w przypadku zastosowania większych prądów następczych. Jednak różnice były małe (raczej w granicach dokładności pomiaru) i z tego względu nie można było przeprowadzić analizy oporności kanału połukowego w zależności od wartości szczytowej prądu następczego.

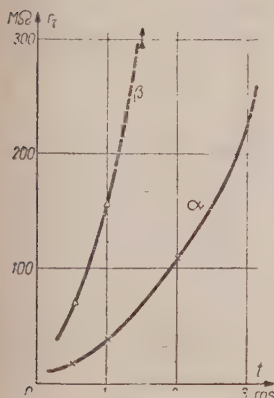
Ponieważ czas trwania półszczytu prądu połukowego jest tym większy, im oporność kanału połukowego wzrasta wolniej, stąd czas ten można



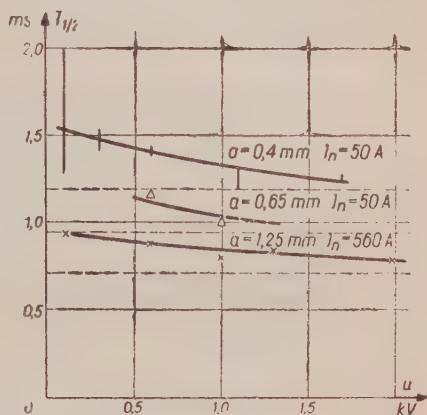
Rys. 13. Czas trwania półszczytu $T_{1/2}$ prądu połukowego w zależności od odległości iskiernika a , przy napięciu na kondensatorze C_1 równym ok. 1300 V , przy prądzie udarowym $0,1 \text{ kA}$. α — przy prądzie następczym $I_n = 65 \text{ A}$, ok. 10 ms, β — przy $I_n = 50 \text{ A}$, ok. 6 ms, γ — przy rozładowaniu iskiernika badanego za pomocą iskiernika i_k z rys. 1. Oporność $R_1=R_2=15,4 \text{ M}\Omega$.

przyjąć za wskaźnik oporności kanału połukowego. Na rys. 13 przedstawiono średni czas trwania półszczytu prądu płynącego przez iskiernik (liczony od chwili zgaśnięcia łuku w iskierniku) w zależności od odległości iskiernika. Pomiary wykonano przy napięciu na C_1 — 1300 V i przy prądzie udarowym $0,1 \text{ kA}$. Krzywą α zdjęto przy prądzie następczym o wartości szczytowej 65 A i czasie trwania ok. 10 ms. Krzywą β przy prądzie następczym o wartości szczytowej 50 A i czasie trwania ok. 6 ms. Krzywą γ otrzymano przy rozładowywaniu iskiernika badanego w stanie bezłukowym za pomocą iskiernika i_k (rys. 1). Korzystając z krzywej γ można obliczyć pojemność równoległą do kanału połukowego (iskiernika badanego i para-

zytowe) z zależności $C = \frac{T_{1/2}}{0,71 R_1}$. Z rys. 13 widać, że ze wzrostem czasu trwania prądu następczego z ok. 6 na ok. 10 ms wzrasta znacznie czas trwania półszczytu prądu płynącego przez iskiernik (prądu połukowego), a więc znacznie maleje szybkość wzrostu oporności kanału połukowego. Przy krótszym czasie trwania prądu następczego jego stromość „podchodzenia” do zera (patrz rys. 1) była większa niż przy dłuższym czasie trwania. Wobec tego można by się w tym przypadku spodziewać, że wytrzymałość powrotna przy krótszym czasie prądu następczego po-



Rys. 14. Oporność kanału połukowego r_x w zależności od czasu połukowego t dla iskiernika o odstępzie $a = 0,4$ mm, przy prądzie udarowym $0,1$ kA. $\alpha = I_n = 65$ A, ok. 10 ms, β — prąd następczy $I_n = 50$ A, ok. 6 ms. Napięcie na C_1 równe 1300 V, oporność $R_1 = R_2 = 15,4$ M Ω .



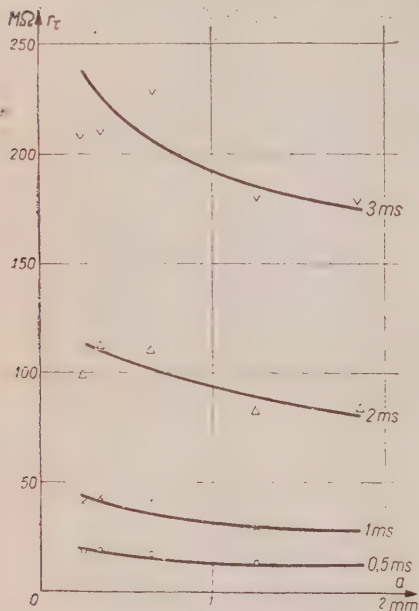
Rys. 15. Czas trwania półszczytu prądu połukowego $T_{1/2}$ w zależności od napięcia na kondensatorze C_1 . Prąd udarowy $0,1$ kA, prąd następczy o czasie trwania ok. 6 ms. Linie przerywane określają czas trwania półszczytu prądu rozładowania iskiernika badanego za pomocą iskiernika i_k (rys. 1.).

winna być wyższa. W oparciu jednak o otrzymany wynik przeciwny [2] nasuwa się przypuszczenie, że stromość „podchodzenia” prądu do zera odgrywa co najmniej drugorzędną rolę. Badania te zdają się być potwierdzeniem wniosków wysuniętych na podstawie badania wytrzymałości powrotnej [2], a mianowicie, że występuje duża niezależność początkowej wytrzymałości powrotnej od stromości podchodzenia prądu następczego do zera.

Na rysunku 14 przedstawiono zależność oporności kanału połukowego od czasu połukowego: dla iskiernika o odstępzie ok. $0,4$ mm przy prądach następczych 50 A, ok. 6 ms i 65 A ok. 10 ms. Z rysunku tego widać także

dominujący wpływ czasu trwania prądu następczego na oporność kanału połukowego.

Na rysunku 15 przedstawiono zależność czasu trwania półszczytu prądu płynącego po zgaśnięciu łuku od napięcia na kondensatorze C_1 przy prądzie udarowym 0,1 kA i prądzie następczym o czasie trwania ok. 6 ms. Naniesione linie przerywane określają czas trwania półszczytu prądu wyładowania iskiernika w stanie bezłukowym (za pomocą iskiernika i_k — rys. 1). Dla iskiernika o odstępzie 0,4 mm uwidoczniło na



Rys. 16. Oporność kanału połukowego r_t w zależności od odległości elektrod a , przy różnych czasach połukowych. Prąd udarowy 0,1 kA, prąd następczy $I_n = 65$ A, ok. 10 ms, napięcie na C_1 równe 1300 V, oporność $R_1 = R_2 = 15,4$ MΩ.

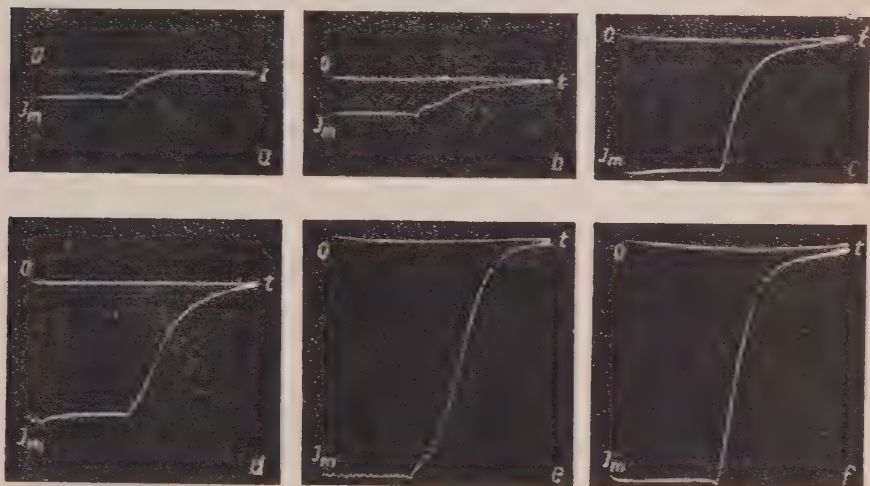
ka o mniejszym odstępzie. Dla małych czasów połukowych różnica ta nie jest duża.

Czwarta seria pomiarów miała na celu zbadanie oporności kanału połukowego iskierników przy prądach następczych i przy dużych prądach udarowych. Badanie wykonano w układzie z rys. 1 przy $C_1 = 0,25$ μF, $R_1 = R_2 = 15,4$ MΩ, przy udarach prądu o wartości szczytowej 4 kA i czasie trwania ok. 10/25 μs i przy prądach następczych o czasie trwania 6 i 10 ms. Otrzymane typowe oscylogramy uwidoczniło na rys. 17. Charaktery-

z rysunku rozrzuty pomiarowe. Z rysunku tego wynika, że oporność kanału połukowego utworzonego przez prąd następczy wzrastała także szybciej w przypadku wyższego napięcia na C_1 , a tym samym i na badanej przerwie iskrowej. Wynik ten potwierdzono dla stosunkowo szerokiego zakresu prądów (50—560 A) i odstępów (0,4—1,25 mm) stosowanych w próbach.

Na rysunku 16 przedstawiono zależność oporności kanału połukowego od odległości elektrod przy różnych czasach połukowych. Pomiary wykonano przy prądzie udarowym o wartości szczytowej 0,1 kA, przy prądzie następczym o wartości szczytowej 65 A i czasie trwania ok. 10 ms i przy napięciu na C_1 równym 1300 V. Z rysunku tego wynika, iż także w przypadku kanału połukowego utworzonego przez prąd następczy, oporność kanału połukowego iskiernika o większym odstępzie jest mniejsza niż kanału połukowego iskiernika o mniejszym odstępzie.

styczną cechą występującą w większości oscylogramów z tej serii jest dość powolne malenie prądu połukowego. Wyniki pomiarów cechowały się bardzo dużymi rozrzutami. W tablicy 1 podano wartości czasu trwania półszczytu prądu płynącego przez iskiernik po zgaśnięciu łuku, przy odstępzie iskiernika ok. 1,2 mm i czasie trwania prądu następczego ok. 10 ms.



Rys. 17. Typowe oscylogramy otrzymane przy badaniu prądu połukowego. Prąd udarowy 4 kA, 10/25 μ s, prąd następczy 125 A, ok. 6 ms, odstęp iskiernika $a=1,2$ mm, a, b — przy napięciu na C_1 ok. 100 V, c, d — przy ok. 600 V, e, f — przy ok. 100 V. Skalowanie osi czasu jak na rys. 9.

Tablica 1

Lp.	I_{ud}	I_n	U_{C_1}	$T_{1/2}$
	kA	A	V	ms
1	4	160	100	0,9 — 1,5
2	4	160	600	1,1 — 3,2
3	4	160	1000	1,2 — 3,4
4	4	160	2000	1,3 — 2,1
5	4	160	3500	0,75 — 2,2

Wobec dużych rozrzutów wyników pomiarowych liczba 10 oscylogramów dla ustalenia wartości średniej okazała się zbyt mała i z tego względu w tym przypadku nie wykreślano krzywych. Jednak porównując wyniki z tablicy 1 z wynikami z rys. 13 można stwierdzić, że zwiększenie prądu udarowego spowodowało znaczne zmniejszenie szybkości wzrostu oporności kanału połukowego.

Dla większości przeprowadzonych pomiarów z prądem następczym i bez prądu następczego przeprowadzono obliczenia oporności kanału połukowego po czasie $10\mu\text{s}$, to znaczy po czasie, w którym zjawiają się w sieci napięcia powrotne. Obliczenia oporności kanałów połukowych wywołanych prądem następczym, występujących po tak krótkim czasie obarczone są błędami. Jednak na podstawie tych obliczeń można stwierdzić, że we wszystkich badanych przypadkach oporność kanału połukowego nie przekraczała $0,1\text{ M}\Omega$.

Oporność oporników sterujących (w stosowanych w iskiernikach odgromnikowych) waha się w granicach $0,1\div 10\text{ M}\Omega$. Można więc stwierdzić, że przy czasach połukowych mniejszych od $10\mu\text{s}$ oporność kanału połukowego jest mniejsza od oporności oporników sterujących.

W miejscach sieci o małych prądach zwarcia w stosunku do prądów następczych odgromników, na odgromnikach pojawia się napięcie powrotne o częstotliwości wynikającej z warunków danej sieci [3]. Jeśli założyć, że to napięcie powrotne po czasie $10\mu\text{s}$ osiąga na pojedynczej przerwie iskrowej o pojemności 50 pF wartość 300 V , to oporność pojemnościowa przerwy iskrowej po czasie $10\mu\text{s}$ będzie rzędu $0,2\text{ M}\Omega$. Oporność ta jest większa od oporności kanału połukowego.

Z powyższego wynika, że w przypadku pojawienia się na odgromniku zaworowym (z iskiernikiem wielokrotnym) napięcia powrotnego o częstotliwości odpowiadającej częstotliwości własnej sieci (np. rzędu kilkudziesięciu kHz), rozkład napięcia powrotnego wzdłuż iskiernika odgromnikowego w znacznym stopniu będzie zależał od rozkładu oporności kanałów połukowych poszczególnych przerw iskrowych.

4. KRYTYKA POMIARÓW

Pomiary oporności połukowej ze względu na swój charakter są zwykle obarczone znacznym błędem. Błąd ten składa się z całkowitego błędu pomiaru prądu (czynnego połukowego i pojemnościowego), błędu wynikającego z rozrzutów poszczególnych pomiarów oraz błędu popełnionego przy obliczaniu oporności połukowej na podstawie oscylogramów prądu całkowitego.

Na podstawie skalowania układu pomiarowego, wartość bezwzględna błędu przy pomiarze całkowitego prądu określono na $\pm 7,5\%$, wartość zaś błędu przy porównywaniu zmierzonych wartości między sobą na $\pm 4\%$.

Ponieważ poszczególne krzywe wykreślono przeważnie na podstawie 10 pomiarów, to prawdopodobieństwo odchyłek od tych krzywych można określić na 10% . Obliczone oporności kanałów połukowych obarczone są dodatkowo błędami powstałymi przy wykreślniej metodzie obliczania

pochodnych $\frac{dI}{dt}$. Kłopotliwe byłoby obliczanie tych błędów dla wszystkich omawianych w rozdziale 3 przypadków. Na podstawie powtarzania tych samych obliczeń można było jednak stwierdzić, że błąd ten był stosunkowo znaczny, w niekorzystnych przypadkach dochodził nawet do 20%. Z tego względu przy wykreśleniu krzywych oporności kanału połukowego nie brano średniej prądu z różnych oscylogramów, lecz na podstawie poszczególnych oscylogramów obliczano oporność kanału połukowego, a następnie brano średnią. Niewątpliwie przyczyniło się to do zmniejszenia wielkości błędów. Należy zwrócić uwagę, że błąd ten wynikał ze znacznych prądów pojemnościowych, które w większości przypadków były większe od prądu połukowego. Jednak praca miała na celu głównie zbadanie iskierników odgromnikowych i z tego względu rezygnując częściowo z dokładności pomiarów, poddawano próbom iskierniki odgromnikowe o dość znacznej pojemności (rzędu kilkudziesięciu pF).

5. WNIOSKI

1. Oporność kanału połukowego iskierników, w zakresie badanych odstępów 0,3÷1,8 mm, zależy od doprowadzanego napięcia, przy którym przeprowadzane są pomiary. Oporność ta jest tym wyższa, im napięcie pomiarowe jest wyższe. W zakresie czasów połukowych 0÷3 ms oporność kanału połukowego iskiernika o mniejszym odstępie szybciej wzrasta od oporności kanału połukowego iskiernika o większym odstępie. Iskierniki o większym odstępie, po tym samym czasie połukowym wykazują mniejszą wartość oporności kanału połukowego niż iskierniki o mniejszym odstępie. Oporność kanału połukowego iskierników, w przypadku których prąd następczy był poprzedzony dużym prądem udarowym, wzrasta wolniej, niż w przypadku występowania przed prądem następczym małych prądów udarowych.

2. Przy występowaniu na odgromniku napięcia powrotnego o częstotliwości własnej sieci (np. kilkadziesiąt kHz), o rozkładzie napięcia powrotnego na iskierniku odgromnikowym decyduje w znacznym stopniu rozkład oporności kanałów połukowych poszczególnych przerw iskrowych.

*Katedra Wysokich Napięć
Politechniki Warszawskiej*

WYKAZ LITERATURY

1. Bałygin J.E.: Żur. Eks. i Teor. Fiziki r. 1954, z. 1.
2. Bader J.: Ar. El. r. 1958, z. 3.
3. Iwanow Ł.I.: Elektrizestwo r. 1954, z. 4.

ОПЫТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДУГОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ МАЛЫХ ИСКРОВЫХ ПРОМЕЖУТКОВ

Резюме

Автором описан контур для измерения последугового сопротивления малых искровых промежутков.

В этом контуре были исполнены измерения последугового сопротивления искровых промежутков с расстояниями от 0,3 до 1,8 мм при импульсных токах от 0,1 до 4 кА и при сопровождающих токах от 50 до 560 А.

Результаты измерений привели к следующим заключениям.

Сопротивление последугового канала для пределов исследуемых промежутков от 0,3—1,8 мм зависит от напряжения, при котором проводятся измерения. Сопротивление это тем больше, чем выше напряжение при измерениях. В пределах времени от 0 до 3 мс сопротивление последугового канала искрового промежутка с меньшим расстоянием возрастает скорее чем сопротивление канала промежутка с большим расстоянием. Искровые промежутки с большим расстоянием после одинакового времени имеют меньшее значение сопротивления последугового канала, чем промежутки с меньшим расстоянием.

Сопротивление последугового канала промежутков, для которых сопровождающему току предшествовал большой импульсный ток, возрастает медленнее, чем промежутков, для которых сопровождающему току предшествовал небольшой импульсный ток.

При возникновении на вентильном разряднике восстанавливающегося напряжения частоты, соответствующей собственной частоте сети (напр. нескольких десятков кГц) — для распределения этого напряжения на искровых промежутках разрядника имеет в значительной степени решающее значение распределение сопротивлений последуговых каналов отдельных искровых промежутков.

EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF ARC RESISTANCE OF GAP ARRESTORS WITH SMALL SPACINGS

Summary

The paper presents a setup for measuring of arc channel resistance of the gap arrestors with small spacings. In this setup the measurements of arc resistances of the gap arrestors with spacings between 0,3—1,8 mm by lightning current of 0,1—4 kA and follow currents of 50—560 A, have been carried out. Out of obtained measurement records the following conclusions are drawn.

The arc channel resistance of the gap arrestors within examined spacings 0,3—1,8 mm depends on the feed voltage applied during the measurement. This resistance is so much higher as much higher is the measuring voltage. Within the range of arc times 0—3 ms the arc channel resistance of the gap arrestor with smaller spacing increases faster than that with larger one. The gap arrestors with greater spacing with the same arc time have smaller value of arc channel resistance than those with smaller spacing. The arc channel resistance of the gap

arrestor, if the follow current is preceded by the great lightning current, increases slower than in the case of its arising in advance of the follow current of the small lightning currents.

If on the arrestor originates the back voltage with frequency corresponding to the frequency of own network, then about the distribution of back voltage on the arrestor decides to a great extent the distribution of the arc channel resistance of the particular spark gaps.

621.315.61:621.315.5:621.3.06.004.12

K. LEIBLER

Właściwości dielektryczne układów rozproszonych dielektryk — przewodnik

Część II¹

(polistyren - przewodnik, polichlorek winylu - przewodnik)

Właściwości dielektryczne dwufazowych układów rozproszonych różnią się znacznie od właściwości dielektrycznych składników układu.

Badania właściwości układu: parafina — przewodnik omówione w części I pracy wykazywały wzrost stałej dielektrycznej z koncentracją objętościową przewodnika i zależność od wielkości cząstek rozproszonych. Na podstawie otrzymanych danych można było również przypuszczać zależność zmian stałej dielektrycznej od rodzaju rozproszonego przewodnika. Może to być spowodowane właściwościami tzw. „warstwy podwójnej” dielektryk — przewodnik [11] ewentualnie wpływem budowy wewnętrznej przewodnika czy dielektryka.

Celem uzyskania pełniejszego obrazu doświadczalnego wykonano w tej pracy pomiary właściwości dielektrycznych układów: polistyren — przewodnik i polichlorek winylu — przewodnik. Zastosowano trzy rodzaje przewodników jako substancji rozproszonej: proszek glinu, proszek mosiądzu i proszek grafitu. Celem umożliwienia analizy wyników i porównania ich, proszki metalu przesiewano przez odpowiednie sита i stosowano proszki o średnicy: $d < 0,06$ mm; $0,06 < d < 0,07$; $0,072 < d < 0,08$ itd. Wyniki porównano ze wzorami teoretycznymi Wienera [13], Bruggmana [2], A. Piekary [11] i Odolewskiego [9].

1. METODA DOŚWIADCZALNA POMIARÓW

A. Wyznaczanie stałej dielektrycznej i stratności.

Stałą dielektryczną i kąt stratności wyznaczano dla stałej częstotliwości 1 MHz przy temperaturze $20 \pm 2^\circ\text{C}$. Część rzeczywistą stałej dielektrycznej mierzono metodą rezonansową za pomocą specjalnie dostosowanego do pomiarów Q-metru z dołączonym kondensatorem pomiarowym płasko-równoległym, w którym odległość między płytkami regulowana była za pomocą śruby mikrometrycznej. Zmiany pojemności rezonansowej wyznaczono za pomocą kondensatora wzorcowego o dokład-

¹ Część I pracy znajduje się w Archiwum Elektrotechniki 1958 T. VII Nr 3, s. 341.

ności 0,2 pF. Uwzględniano wpływ pola rozproszonego (patrz część I) kąt stratności wyznaczano metodą mostkową za pomocą miernika strat (RFT). Zakres pomiarów $\tan \delta$ od 10^{-4} do 10^{-2} . Błąd pomiarów stałej dielektrycznej nie przekraczał 2%, kąta stratności 3%.

B. Wykonywanie próbek.

Próbki wykonywane były w specjalnej matrycy. Wyszuszony proszek substancji dielektrycznej dokładnie mieszano z proszkiem metalu i ogrzewano do temperatury topnienia dielektryka za pomocą cieczy z termostatu przepływającej przez układ przewodów w ścianie matrycy. Następnie odpompowywano powietrze i prasowano próbki pod odpowiednio wysokim ciśnieniem. Dzięki tej metodzie unikano zawartości powietrza i wilgoci w próbce. Tak przygotowane próbki okładano płytkami cienkiej cynfolii dla zapewnienia dobrego kontaktu z okładkami kondensatora.

C. Wyznaczanie koncentracji objętościowej przewodnika.

Koncentrację objętościową przewodnika w próbce wyznaczano na podstawie pomiarów gęstości próbki i gęstości składników. Dokładność pomiarów była rzędu 3%.

2. WYNIKI POMIARÓW

A. Układy polistyren — przewodnik.

Stałe dielektryczne stosowanego polistyrenu:

$$\epsilon' = 2,52; \tan \delta < 3 \cdot 10^{-4}; \rho = 1,045 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{proszek glinu} \quad \rho = 2,70 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{„ mosiądu} \quad \rho = 6,5 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{„ grafitu} \quad \rho = 2,25 \text{ g/cm}^3$$

Kształt proszków był nieregularny.

Wyniki pomiarów podane są w tablicach 1, 2 i 3 oraz na rysunku 1 i 2.

B. Układy polichlorek winylu — przewodnik.

Użyto polichloroku winylu o następujących właściwościach:

$$\epsilon' = 3,56; \tan \delta = 1,8 \cdot 10^{-3}; \rho = 1,43 \text{ g/cm}^3.$$

Wyniki pomiarów podane są w tablicach, 4, 5 i 6 oraz na rysunku 3.

Zależność części urojonej stałej dielektrycznej od części rzeczywistej podana jest na rysunku 4.

3. WNIOSKI Z DANYCH DOŚWIADCZALNYCH

1) Otrzymane wyniki potwierdzają fakt znacznego wzrostu stałej dielektrycznej układu rozproszonego dielektryk — przewodnik ze wzrostem koncentracji objętościowej przewodnika. Równocześnie jednak ze wzro-

Układ polistyren — glin

Tablica 1

 $d < 0,06$ mm $0,06 < d < 0,07$

Nr	$\vartheta\%$	ε'	ε''	Nr	$\vartheta\%$	ε'	ε''
1	3,01	6,56	0,01	1	4,83	4,75	0,01
2	3,21	6,98	0,01	2	6,97	13,38	0,03
3	6,33	24,62	0,16	3	7,26	15,38	0,04
4	7,36	24,38	0,13	4	11,28	20,91	0,16
5	9,35	45,53	0,31	5	13,34	45,44	0,30
6	9,59	43,23	0,28	6	18,02	73,70	0,41
7	12,13	59,68	0,54	7	22,02	204,32	2,53
8	12,37	76,46	0,92	8	20,45	131,11	2,17
9	17,07	133,11	1,86	9	21,5	∞	
10	21,02	188,22	1,85				
11	21,00	∞					
0,07 < d < 0,08				0,08 < d < 0,25			
1	5,97	4,96	0,02	1	5,25	3,69	0,01
2	13,67	32,30	0,17	2	8,57	5,69	0,01
3	17,44	33,16	0,28	3	12,55	8,41	0,01
4	19,01	71,94	0,94	4	15,09	10,09	0,03
5	22,02	155,04	3,88	5	17,80	15,95	0,04
6	22,75	173,09	3,73	6	20,40	21,30	0,08
7	22,50	∞		7	24,92	20,82	0,07
				8	26,0	∞	

Układy polistyren — mosiądz

Tablica 2

 $d < 0,06$ mm $0,06 < d < 0,07$

Nr	$\vartheta\%$	ε'	ε''	Nr	$\vartheta\%$	ε'	ε''
1	0,7	3,53	0,01	1	1,1	3,79	0,01
2	2,4	5,08	0,04	2	4,3	7,49	0,13
3	4,1	7,16	0,11	3	5,5	11,34	0,29
4	5,2	20,70	2,5	4	7,6	38,49	1,46
5	6,7	26,50	1,0	5	8,5	∞	
6	7,2	40,00	2,2				
7	7,8	∞					
0,07 < d < 0,08 mm				0,08 < d < 0,10 mm			
1	1,1	3,70	0,01	1	1,0	3,59	0,01
2	2,6	5,50	0,05	2	2,8	4,88	0,02
3	4,1	9,08	0,26	3	3,7	7,41	0,10
4	6,0	16,68	0,90	4	6,6	19,78	2,6
5	6,9	31,10	4,35	5	7,4	17,41	1,1
6	8,8	∞		6	9,3	84,30	3,1
				7	11,0	∞	

Tablica 3

Układy polistyren — grafit

 $d < 0,06$ mm $0,06 < d < 0,07$ mm

Nr	$\vartheta^{\circ}/_0$	ε'	ε''	Nr	$\vartheta^{\circ}/_0$	ε'	ε''
1	4,0	2,86	0,01	1	3,9	2,80	0,01
2	6,1	3,54	0,01	2	6,14	3,28	0,01
3	7,2	4,00	0,01	3	9,71	4,28	0,02
4	10,46	6,90	0,01	4	11,70	5,49	0,05
5	11,50	15,00	0,01	5	14,94	30,50	0,23
6	12,0	∞		6	15,30	∞	
0,07 < d < 0,08				0,08 < d < 0,09			
1	3,65	2,85	0,01	1	4,90	2,80	
2	5,98	3,08	0,01	2	6,22	3,09	
3	8,46	3,52	0,01	3	7,80	3,52	
4	9,63	4,06	0,01	4	9,79	3,90	
5	12,03	5,10	0,03	5	11,62	5,50	
6	15,52	12,88	1,22	6	14,61	12,96	
7	18,60	∞		7	19,0	∞	

Tablica 4

Układy polichlorek winylu — glin

 $d < 0,06$ $0,06 < d < 0,07$

1	5,00	8,85	0,39	1	4,76	7,28	0,38
2	8,73	16,69	1,12	2	11,90	11,27	0,78
3	12,70	34,61	2,60	3	13,90	17,00	1,46
4	15,08	44,00	3,48	4	15,77	13,49	1,48
5	19,05	57,30	4,18	5	19,84	36,44	3,06
6	21,43	94,97	5,70	6	22,20	39,50	4,75
7	23,02	118,51	6,16	7	24,60	58,44	4,62
8	23,5	∞		8	25,0	∞	

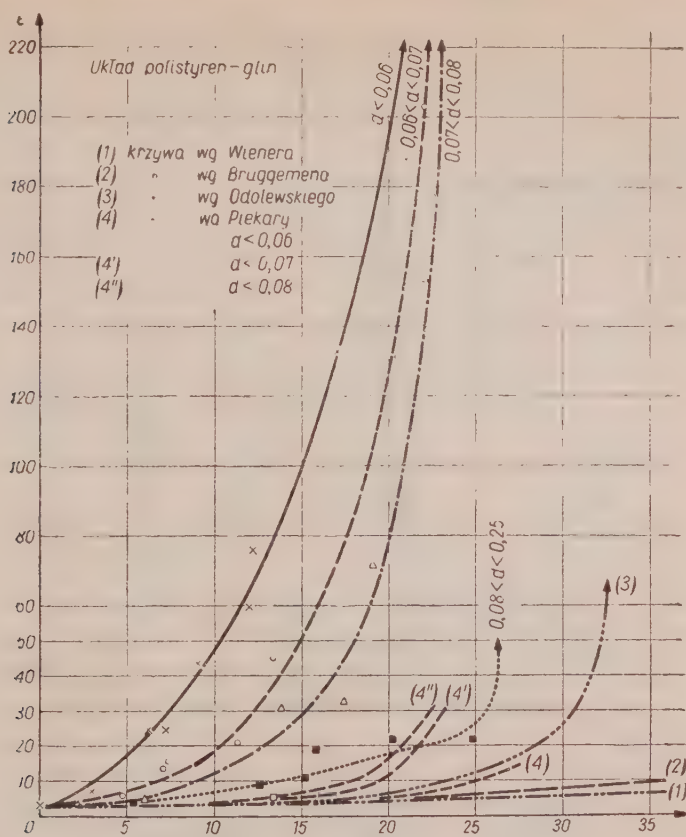
Tablica 5

Układy polichlorek winylu — mosiądz

 $d < 0,06$ mm $0,06 < d < 0,07$ mm

1	2,38	5,13	0,01	1	2,7	5,19	0,28
2	4,1	6,27	0,03	2	4,5	8,32	0,52
3	6,3	8,02	0,05	3	6,5	10,61	0,90
4	7,8	11,75	0,95	4	8,8	17,30	1,61
5	9,4	14,17	1,56	5	10,2	21,93	2,41
6	11,2	90,15	1,01	6	11,8	38,79	3,5
7	13,0	∞		7	13,5	∞	

stem koncentracji zwiększa się kąt stratności, a więc część urojona stałej dielektrycznej. Przy pewnych koncentracjach metalu cała próbka staje się przewodnikiem.



Rys. 1. Układ polistyren—glin.

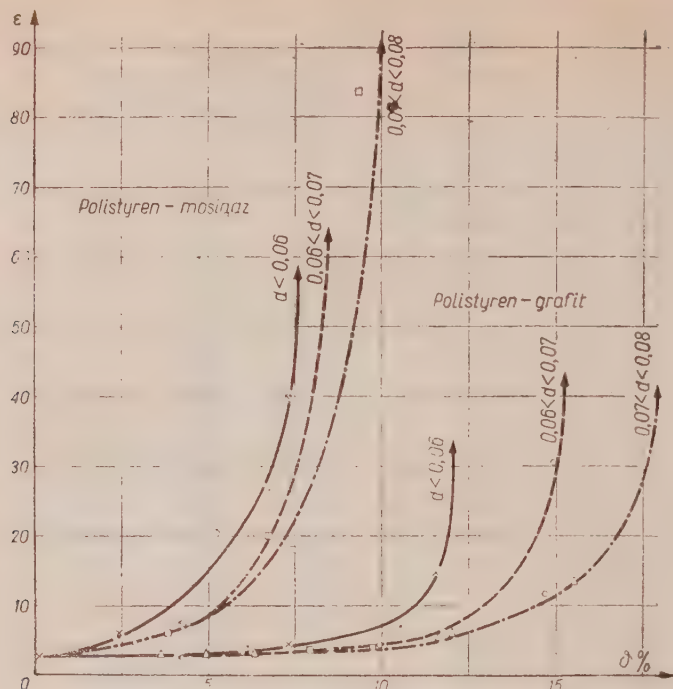
Tablica 6

Układy polichlorek winylu — grafit

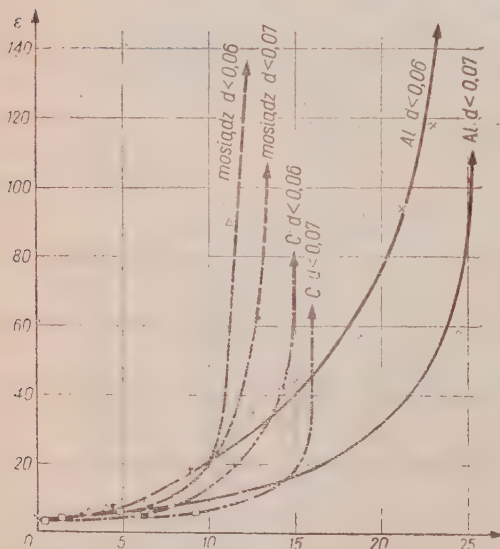
 $d < 0,06$ mm $0,06 < d < 0,07$ mm

Nr	θ %	ϵ'	ϵ''	Nr	θ %	ϵ'	ϵ''
1	1,65	4,12	0,14	1	0,83	4,41	0,09
2	4,14	4,58	0,15	2	4,15	4,67	0,12
3	4,98	5,48	0,20	3	5,81	5,24	0,15
4	6,64	6,36	0,24	4	6,64	5,53	0,24
5	8,00	7,68	0,33	5	9,13	6,80	0,48
6	11,62	21,32	2,35	6	12,45	10,75	0,81
7	14,77	∞		7	15,77	∞	

2) Krzywa wzrostu stałej dielektrycznej z koncentracją osłodka rozproszanego zależna jest od wielkości cząstek rozproszonych. Na ogół



Rys. 2. Układy: polistyren—mosiądz i polistyren—grafit.

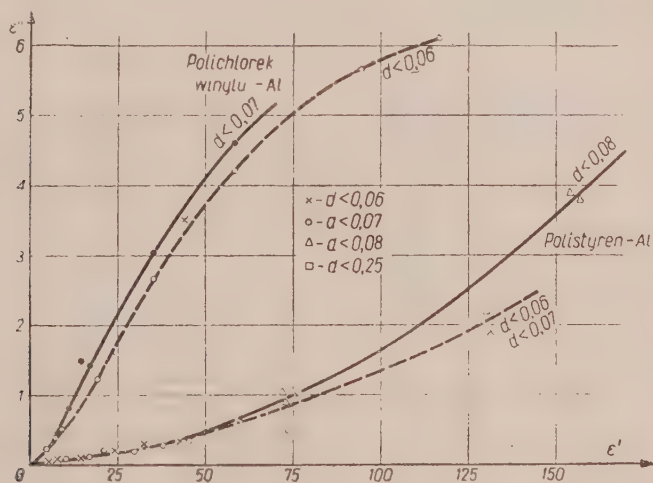


Rys. 3. Polichlorek winylu—metal.

można stwierdzić, że wzrost jest szybszy dla cząstek mniejszych (rys. 1, 2, 3).

3) Zmiana stałej dielektrycznej w zależności od koncentracji przewodnika przy jednakowej średnicy cząstek zależy od rodzaju przewodnika (rys. 3 i 5). Potwierdza to wnioski części I pracy. Wydaje się, że otrzymane różnice nie mogą być spowodowane samą przypadkową różnicą kształtu cząstek (dla zbadania tej możliwości podjęte zostały badania przy rozproszonych cząstkach sferycznych).

4) Doświadczenia wykazują zależność zmiany stałej dielektrycznej w funkcji koncentracji od rodzaju dielektryka. Dla cząstek rozproszonych z tego samego materiału o równych średnicach otrzymujemy różne krzywe w zależności od ośrodka dielektrycznego. Krzywe te podane są na rysunkach 6 i 7. Nawet przy bliskich stałych dielektrycznych ośrodków (parafina $\epsilon = 2,30$, polistyren $\epsilon = 2,52$) widoczne są wyraźne różnice, które jak się wydaje nie mogą być spowodowane tylko różnicą ϵ_2 , a raczej wpływem „warstwy podwójnej”.



Rys. 4. Zależność części urojonej stałej dielektrycznej od części rzeczywistej dla różnych układów.

4. PORÓWNANIE WYNIKÓW DOŚWIADCZALNYCH Z WZORAMI TEORETYCZNYMI

Teoretyczne obliczenie stałej dielektrycznej układu rozproszonego na podstawie zawartości składników i ich właściwości kształtu i wielkości czynnika rozproszonego przedstawionych zostało w szeregu prac. Użyte wzory nie uwzględniają wszystkich czynników wpływających na zmiany stałej dielektrycznej i są wzorami przybliżonymi, stosowanymi w pewnych szczególnych przypadkach. W pracy porównano wyniki doświadczalne z najczęściej stosowanymi wzorami Wienera [13], Brugge-mana [2], Odolewskiego [9] i uwzględniającymi wzajemne oddziaływanie kulek przewodnika wzorem A. Piekary [11]. Stosowane wzory wyprowadzone są dla przypadku cząstek sferycznych układu tzw. „statystycznego”.

Wymienione wzory dla przewodzącego czynnika rozproszonego $\epsilon_1 = \infty$ przyjmują następującą postać:

a) Wzór Własera

$$\epsilon_m = \epsilon_2 \left(1 - \frac{3\theta}{1-\theta} \right),$$

gdzie

θ — koncentracja objętościowa.

ϵ_2 — stała dielektryczna ośrodka.

Wzór Lasina [7] dla $\epsilon_1 = \infty$ i małych cząstek rozproszonych przyjmuje tę samą postać.

b) Wzór Bruggemana dla sfier przyjmuje w podanym przypadku postać:

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_2}{(1-\theta)^2}.$$

c) Wzór Odolewskiego dla mieszanin statystycznych i zgodny z nim w przypadku $\epsilon_1 = \infty$ wzór Böttchera [1] i Landauera [5].

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_2}{1-3\theta}.$$

Jak już podano w pracy uprzedniej [11] wzór ten można stosować dla $\theta < 1/3$.

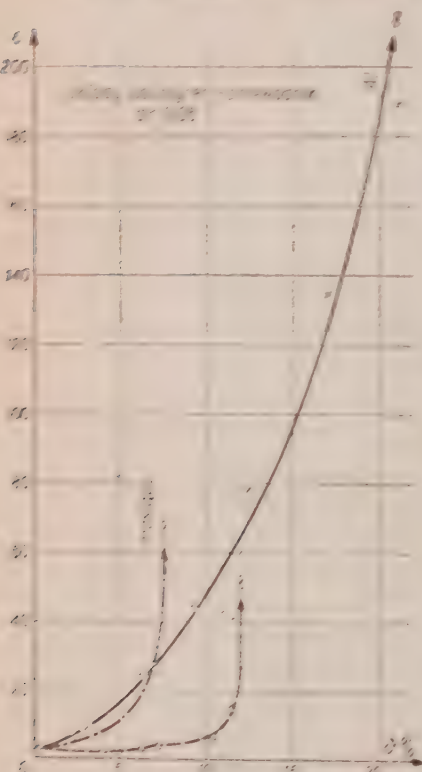
d) Równanie A. Piekary przyjmuje postać:

$$\epsilon_m = \epsilon_2 \left[1 + \frac{2A'\theta}{1-A'\theta} \right],$$

gdzie $A' = 1 + A\theta + B \frac{r}{d}$. $A = 0,10446$,

$B = 0,2796$, r — promień kulek fazy rozproszonej, d — odległość płytek kondensatora.

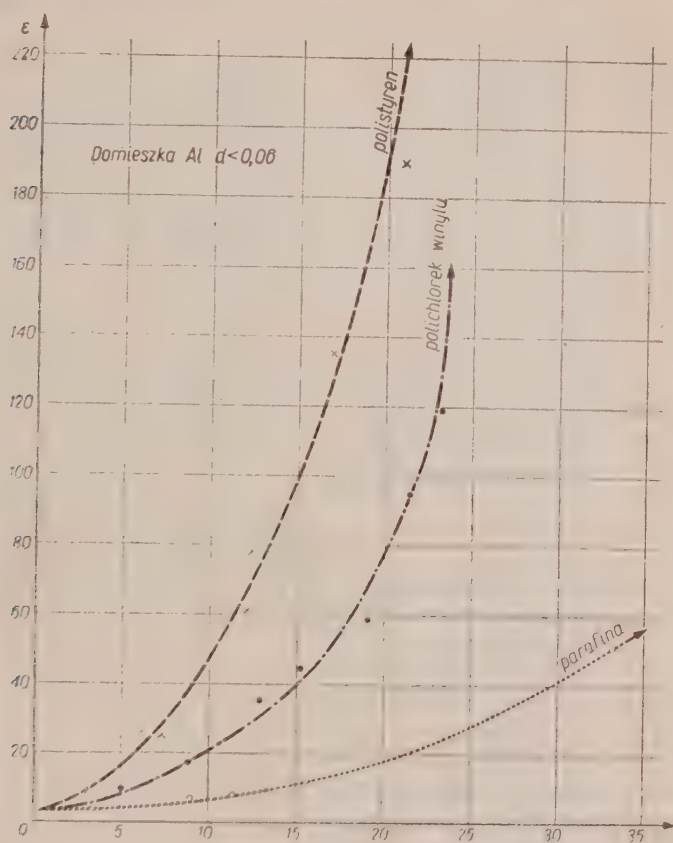
Krzywe uzyskane na podstawie wymienionych równań podane są na rysunku 1. Jak widać przewidywany wzrost stałej dielektrycznej jest znacznie mniejszy, zwłaszcza dla



Rys. 1 Układy polistyren-przewodniki.

dużych koncentracjach, od uzyskiwanego w praktyce. Najlepsze przybliżenie krzywych doświadczalnych zwłaszcza dla większych cząstek rozproszonych daje podobnie jak dla układów parafiny, wzór A. Piekary. Wskazuje to na duży wpływ nie uwzględnianych w teorii warunków powierzchniowych i rodzaju substancji.

Dla otrzymania lepszych możliwości porównania doświadczeń z teorią prowadzone są prace dla otrzymania układów rozproszonych z domieszkami ściśle sferycznymi.



Rys. 6. Układy proszek Al—dielektryki.

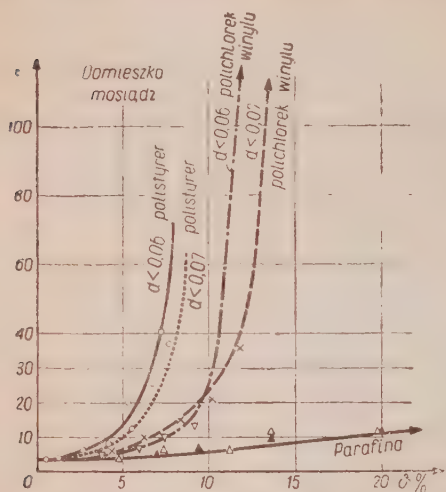
5. ZEBRANIE WYNIKÓW

W pracy zbadano doświadczalnie właściwości dielektryczne układów rozproszonych dielektryk — przewodnik dla układów: polistyren — glin, polistyren — miedź i polistyren — grafit, oraz polichlorek winylu z tymi samymi domieszkami. Użyto proszków przesianych o średnicy $d < 0,06$ mm; $0,06 < d < 0,07$ mm; $0,07 < d < 0,08$ mm.

Stwierdzono:

1. Silny wzrost stałej dielektrycznej układu przy zwiększaniu concen-

tracji objętościowej domieszki. Dla charakterystycznej dla każdego przypadku koncentracji próbki stawały się przewodnikami.



Rys. 7. Układy dielektryków z mosiądzem jako domieszką.

2. Zależność zmian stałej dielektrycznej układu od promienia cząstek rozproszonych.

3. Różny przebieg krzywych w zależności od rodzaju domieszki w tym samym dielektryku przy równej średnicy cząstek.

4. Różny przebieg krzywych w zależności od rodzaju dielektryka dla tego samego rodzaju domieszki.

5. Krzywe doświadczalne odbiegają od krzywych teoretycznych uzyskanych na podstawie stosowanych zazwyczaj teorii.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na charakterystyczny fakt, że wśród wykonanych próbek zdarza się czasem próbki o stałej dielektrycznej, znacznie odbiegającej od krzywej doświadczalnej. Spowodowane to być może pewnym przypadkowym ułożeniem cząstek rozproszonych.

WYKAZ LITERATURY

1. Böttcher: 1945 Rec. Trav. Chim. Pays. Bas. 64. 47.
2. Bruggeman: Ann. Phys. Lpz., 5. 24. 636, 1935.
3. Burton Turnball: Proc. Roy. Soc. A, 158.182, 1937.
4. Kelly: J. Appl. Phys., 24.254.1, 1953.
5. Landauer: J. Appl. Phys., 23.779, 1952.
6. Leibler: Arch. Elektr. VII, Nr 3, 1958.
7. Lewin: JIEE, 94.65, 1947.
8. Lichteneker: Phys. Ztschr., 32.255, 1931.
9. Odolewski: Ż. Tiechn. Fiz., XXI. 667, 1951.
10. Pearce: Brit. Journ. Appl. Phys., 6.113, 1955.
11. Piekara: Koll. Ztschr., 59.12, 1932. Acta phys. Pol. 1.135.1932. Acta phys. Pol. 285.1932.
12. De Vries: Brit. Journ. Appl. Phys., 8, 1957.
13. Wiener: Abh. Math. Phys., 32.509, 1912.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ «ДИЭЛЕКТРИК-ПРОВОДНИК»

Резюме

В работе экспериментально исследованы диэлектрические свойства дисперсных систем диэлектрик-проводник для диэлектрик: полистирена и полихлорвинила с примесями порошкообразных: алюминия, латуни и графита.

Были применены просеянные порошки с диаметрами частиц:

$$d < 0,26 \text{ mm}; 0,06 \text{ mm} < d < 0,07 \text{ mm}; 0,07 < d < 0,08 \text{ mm}; 0,08 < d < 0,10 \text{ mm}.$$

Были определены действительная и реактивная составляющие диэлектрической постоянной по резонансному и мостовому методам для частоты 1 мегагерца с точностью до 3%. Образцы были изготовлены в специально сконструированной матрице при температуре плавления диэлектрика. Из матрицы выкачивался воздух и образцы прессовались при соответственно высоком давлении.

Констатируется:

1. Значительное увеличение диэлектрической постоянной системы при увеличении объёмной концентрации примеси. При характеристической для каждого случая концентрации — образец становился проводником. Увеличение концентрации ведет также к увеличению реактивной составляющей диэлектрической постоянной.

2. Изменения диэлектрической постоянной системы зависят от размеров частиц проводника.

3. При одинаковых диаметрах частиц примеси в одном и том же диэлектрике кривая зависит от рода примеси.

4. Для одного и того же рода примеси кривые зависят от рода диэлектрика. Отчетливые различия выступают даже при близких значениях диэлектрической постоянной среды (напр. полистирен $\epsilon = 2,52$, и парафин $\epsilon = 2,30$).

5. Опытные кривые отличаются от теоретических, полученных на основании применяемых обыкновенно теорий. Самая лучшая аппроксимация достигнута при применении формулы А. Пекары.

DIELECTRIC PROPERTIES OF DISPERSED DIELECTRIC-CONDUCTOR SYSTEMS

Summary

In the work the dielectric properties of dielectric-conductor systems for such dielectrics as polyvinylbenzine and vinyl polychloride with additions of powdered aluminium, brass and graphite have been explored experimentally.

Employed sifted powders had the following range of diameters:

$$d < 0.06 \text{ mm}; 0.06 \text{ mm} < d < 0.07 \text{ mm}; 0.07 \text{ mm} < d < 0.08 \text{ mm} \text{ and } 0.08 \text{ mm} < d < 0.10 \text{ mm}$$

The real and imaginary part of constant dielectric curve have been defined with the aid of resonance and bridge methods for frequencies of 1 MHz with exactitude up to 3%. The preparation of specimens was carried out in specially designed die and meeting temperature of the dielectric.

The air has been pumped out and the stamping was performed under appropriately high pressure.

The recorded results lead to the following conclusions:

1. With growing volumetric concentration of addition the constant dielectric increases considerably. For a characteristic in each case concentration the specimen becomes a conductor. With growing concentration the imaginary part of constant dielectric also increases.
2. Variations of constant dielectric of the system depend on the dimensions of the dispersed particles.
3. If the diameters of addition particles in the same dielectric are equal, the shape of curves depends on the kind of additions.
4. The shape of curves for the same kind of addition depends in the kind of dielectric. Noticeable differences arise even by the close values of constant dielectric of the region (for example polyvinylbenzene $\epsilon = 2,32$ and paraffin $\epsilon = 2,30$).
5. Experimental curves deviate from theoretical ones obtained on the basis of usually applied theories. The closest results are obtained from the formula of A. Piekara in particular for bigger dispersed particles

621.314.7.001.2

B. MROZIEWICZ

Technologia przejść stopowych $p-n$ z punktu widzenia ich kształtu

Rękopis dostarczono 3. 10. 1958

Częstotliwość graniczna tranzystora i współczynnik wzmocnienia prądowego α zależą w znacznym stopniu od kształtu przejść $p-n$ emitera i kolektora. Kształt przejścia jest związany ze sposobem jego wykonania oraz zależy od składu domieszki wtopionej w german i orientacji płaszczyzny płytki względem osi krystalograficznej. Po omówieniu tych zagadnień autor przedstawia wyniki badań nad kształtem przejść otrzymywanych w próżni i wodorze przez wtapianie w german czystego indu i indu z domieszkami. W końcowej części pracy opisano przeprowadzone doświadczenia i podano metody ujawnienia przejść $p-n$.

1. WPROWADZENIE

Działanie wszystkich znanych obecnie przyrządów półprzewodnikowych jest wynikiem własności tzw. przejść (złączy) utworzonych na ogół w monokrystalicznym materiale półprzewodnika. Przejście możemy najogólniej zdefiniować jako powierzchnię oddzielającą dwie znacznie różniące się właściwościami części półprzewodnika. Mówiąc o właściwościach zwykle bierze się pod uwagę rodzaj przewodnictwa, chociaż możliwe są również przejścia oddzielające obszary o różnych czasach życia itp.

Największe zastosowanie znalazły dzięki swym nieliniowym właściwościom przejścia $p-n$, ($n-p$). Powstają one w półprzewodniku jako wynik zmiany stosunku koncentracji domieszek akceptorowych i donorowych.

Metody tworzenia przejść $p-n$ mogą być podzielone na dwie ogólne grupy. Grupa pierwsza obejmuje metody, w których domieszki mające za zadanie zmianę przewodnictwa materiału, wprowadzone są w kryształ w momencie jego wzrostu. Przedstawicielem przejść otrzymywanych metodą należącą do tej grupy może być przejście hodowane. Do grupy drugiej należą sposoby opierające się na specjalnej obróbce gotowego kawałka jednorodnego kryształu. Obróbka ta ma na celu lokalną zmianę przewodnictwa materiału i może polegać bądź na wprowadzeniu do kryształu atomów domieszki z zewnątrz, bądź też na zmianie właściwości

materiału poprzez procesy termiczne, bombardowanie cząstkami itp. Przykładem może być metoda stopowa lub dyfuzyjna.

W obecnej technice półprzewodników najczęściej stosowana jest metoda stopowa. Fakt ten należy tłumaczyć zarówno prostotą technologii, jak i stosunkowo dobrymi właściwościami przejść stopowych. Zakres zastosowania metody stopowej w technice tranzystorowej ograniczony jest przez trudności występujące przy wykonywaniu przejść równoległych położonych blisko siebie. Trudności te narzucają zwykle górną granicę częstotliwości, przy której tranzystor może być jeszcze wykorzystywany jako urządzenie wzmacniające. Kształt przejść zależy przede wszystkim od sposobu ich wykonania. Zagadnienie to jest tematem niniejszej pracy. Ograniczono go do przejść otrzymywanych przez wtapianie indu w german n i ujęto od strony ich przydatności do celów tranzystorowych.

Oznaczenia:

W pracy niniejszej przyjęto następujące oznaczenia:

ρ — oporność właściwa

L — długość dyfuzyjna

τ — czas życia

D — stała dyfuzji

W — grubość bazy

C — pojemność

S — szybkość rekombinacji powierzchniowej

t_p — czas przelotu nośników

indeksy: e, b, k oznaczają odpowiednio:

emiter, baza, kolektor

2. WYMAGANIA ODNOSNIE KSZTAŁTU PRZEJŚĆ $p-n$

2.1. Wpływ kształtu przejść na częstotliwość graniczną.

Właściwości wzmacniające tranzystorów warstwowych pogarszają się ze wzrostem częstotliwości, co ogranicza zakres ich zastosowań. Częstotliwość, przy której wzmocnienie tranzystora maleje o 3 db, nazywamy częstotliwością graniczną tranzystora f_{gr} . Obniżenie wzmocnienia ze wzrostem f jest konsekwencją mechanizmu działania tranzystora i wiąże się z ruchem nośników przez obszar bazy, jak również jest wynikiem filtracyjnego działania połączonych ze sobą oporności i pojemności tranzystora. Z uwagi na ostatnią okoliczność, spadek wzmocnienia zależy od sposobu połączenia tranzystora.

Ze względu na małe natężenie pola w obszarze bazy, ruch wstrzykniętych nośników jest wynikiem dyfuzji zachodzącej wskutek gradientu gęstości nośników. Konsekwencją tego jest stosunkowo długi czas przelotu nośników oraz jego dyspersja wywołana przez zderzenia i różnicę dróg. Pociąga to za sobą nierówne co do wartości przesunięcia fazowe nośników

i w wyniku obniżenia wzmocnienia. W układzie z uziemioną bazą, przedstawionym za pomocą czwórnika typu T , opisane zjawisko może być ujęte wyrażeniem

$$\alpha = \beta = \operatorname{sech} \left[\left(1 + \omega t_p \right)^{\frac{1}{2}} \frac{W}{L_B} \right] = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} (1 + j\omega t_p) \frac{W^2}{L_B^2}}, \quad (1)$$

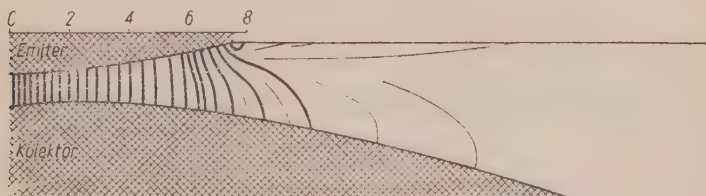
gdzie α współczynnik wzmocnienia prądowego

$$\alpha = \gamma \cdot \beta \cdot \alpha^*,$$

przy czym dla tranzystorów warstwowych $\gamma \cdot \alpha^* = 1$. Współczynnik β zaczyna maleć, gdy czas przelotu nośników staje się współmierny z okresem przyłożonego sygnału. Zależność tę przedstawiono na rys. 1. Częstotliwością graniczną ze względu na α nazwiemy częstotliwość, przy której α maleje o 3 db. Na podstawie (1) możemy ją określić z następującego związku:

$$f_a = \frac{1}{\pi t_p} \left(\frac{L_B}{W} \right)^2 = \frac{D}{\pi W^2}. \quad (2)$$

Przytoczone zależności są słuszne dla płaskich przejść $p-n$. W przypadku przejść nierównoległych, dyspersja czasu przelotu nośników rośnie ze względu na geometryczną różnicę długości dróg (rys. 2).



Rys. 2. Obraz dróg nośników w tranzystorze.

Zagadnienie to rozpatrywał Moore i Stripp za pomocą map dróg nośników [19]. Analiza teoretyczna i doświadczenia wykazały, że dla przejść sferycznych α spada o 3 db przy częstotliwości ok. 1 Mc/s, podczas gdy dla tranzystora o płaskich przejściach i tej samej grubości bazy α spadło o 3 db przy 5 Mc/s.

Celem jakościowego rozpatrzenia wpływu krzywizny przejść na czę-

stotliwość graniczną f_a , przeprowadzimy rozważania nad uproszczonym tranzystorem (rys. 3) spełniającym następujące założenia [9]:



Rys. 3. Schematyczny obraz przekroju tranzystora.

1. tranzystor jest równoległym połączeniem nieskończenie wielu elementarnych tranzystorów jednowymiarowych o elementarnej powierzchni A_n i odległości między złączami W_n (tranzystory różnią się między sobą jedynie wielkością A i W),

2. emiter ma przekrój o kształcie określonym zależnościami $W=a$ gdy $r < R_1$

$$W = a + b \left(\frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)^2 \quad \text{dla} \quad R_1 < r < R_2$$

r jest tu zmienną niezależną, pozostałe oznaczenia podane są na rys. 3.

3. zanedbujemy rekombinację nośników na powierzchni,

4. w dowolnym punkcie tranzystora spełniony jest warunek

$$\frac{W_n}{L_p} \ll 1.$$

Współczynnik α tranzystora spełniającego powyższe warunki, w zakresie małych częstotliwości wyraża się następującą zależnością

$$\alpha = \frac{\sum_{n=1}^N A_n \operatorname{csch} \frac{W_n}{L_B}}{\sum_{n=1}^N A_n \operatorname{ctgh} \frac{W_n}{L_B}}. \quad (3)$$

Wpływ zmian częstotliwości na α uwzględniamy podstawiając zamiast L_B wyrażenie $L_B(1 + \omega\tau_B)^{-\frac{1}{2}}$ [24] w którym τ_B jest czasem życia dziur w bazie. Wówczas

$$\alpha = \beta = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{A_n}{W_n}}{\sum_{n=1}^N \frac{A_n}{W_n} + \frac{i\omega}{2D_B} \sum_{n=1}^N A_n W_n}. \quad (4)$$

Zgodnie z ostatnim wyrażeniem, wartość α spadnie o 3 db w stosunku do wartości dla niskiej częstotliwości, gdy zajdzie równość

$$\sum_{n=1}^N \frac{A_n}{W_n} = \frac{\omega}{2D_B} \sum_{n=1}^N A_n W_n.$$

Stąd

$$\omega_\alpha = \frac{2D_B \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{W_n}}{\sum_{n=1}^N A_n W_n} \quad (5)$$

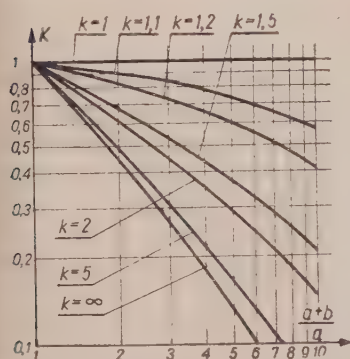
Przechodząc do całki (w założeniu ciągłości grubości bazy) mamy

$$\omega_\alpha = 2D_B \frac{\int_0^{R_1} \frac{2\pi r}{a} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi r}{a + b \left(\frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)^2} dr}{\int_0^{R_1} 2\pi r dr + \int_{R_1}^{R_2} \left[a + b \left(\frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)^2 \right] 2\pi r dr} \quad (6)$$

Rachunek jest oczywiście uproszczony; traktując problem dokładniej, należałoby rozpatrywać całki powierzchniowe. Dokładna analiza matematyczna nie miałaby jednak sensu wobec upraszczających założeń dotyczących samego tranzystora. Oznaczając $\frac{R_2}{R_1} = k$, otrzymamy po rozwiązaniu (6) wyrażenie:

$$\omega_\alpha = \frac{2D_B}{a^2} \frac{1 + \frac{a}{b} (k-1)^2 \ln \frac{a+b}{a} + 2(k-1) \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}}{k^2 + \frac{b}{a} \frac{2}{(k-1)^2} \left(\frac{k^4}{4} - \frac{2k^3}{3} + \frac{k^2}{2} - \frac{1}{12} \right)} = \frac{2D_B}{a^2} K. \quad (7)$$

Z wykresu otrzymanej zależności (rys. 4) wynika jasno zaleta płaskich przejść $p-n$. Z uwagi na poczynione założenia, porównanie może być traktowane tylko jako jakościowe.



Rys. 4. Obniżenie f_{gr} przez nierównoległość przejść tranzystora.

2.2. Wpływ kształtu przejść na wartość współczynnika wzmocnienia prądowego.

Współczynnik wzmocnienia prądowego tranzystorów warstwowych definiowany jest jako $a = \left(\frac{\partial J_k}{\partial J_e} \right)_{u_k = \text{const}}$.

W pierwszym przybliżeniu możemy napisać

$$a = \frac{J_k}{J_e} = 1 - \frac{J_b}{J_e}, \quad (8)$$

gdzie J_e, J_k, J_b są odpowiednio prądami emitera, kolektora i bazy, przy czym $J_e = J_k + J_v + J_s$ oraz $J_b = J_v + J_s$;

J_v — jest tu składową prądu emitera odpowiadającą nośnikom straconym wskutek rekombinacji objętościowej w ciągu 1 sek,
 J_s — prądem nośników straconych wskutek rekombinacji powierzchniowej.

Dokładna analiza procesu dyfuzji nośników w bazie, przeprowadzona przez Moore i Strippa [19] pozwoliła na ustalenie zależności

$$b = \left(\frac{T}{\tau} + \frac{s}{K} \right)^{-1} [1 + F(\tau, s)], \quad (9)$$

gdzie

$b = \frac{a}{1-a}$, $F(\tau, s)$ jest pewną dodatnią funkcją wyrażającą poprawkę na rekombinację; funkcja ta dąży do zera, gdy $\tau \rightarrow \infty$ i $s \rightarrow 0$.

$$K^{-1} = \frac{\int P^0 d\sigma}{D \int_c |\nabla P^0| d\sigma} \quad (10)$$

$$T = \frac{\int P^0 dv}{D \int_c |\nabla P^0| d\sigma} \quad (11)$$

są pewnymi współczynnikami geometrii tranzystora.

W większości przypadków spotykanych w technologii tranzystorów warstwowych, wykonywanych na odpowiednio dobrym germanie, można zaniedbać rekombinację objętościową¹, a wówczas

$$b = \frac{K}{s} [1 + F(s)], \quad (12)$$

Stała K oraz $F(s)$ są funkcjami kształtu przejść, ich wzajemnego usytuowania, stosunku ich powierzchni, rekombinacji powierzchniowej itd. Dokładna analiza wydaje się niecelowa w niniejszej pracy; rozpatrzmy jedynie konkretny przypadek tranzystora o geometrii przedstawionej na rys. 6 i założonej szybkości rekombinacji 300 i 1000 cm/sek.

Badania przeprowadzone nad tranzystorem tego kształtu [19] w oparciu o analizę matematyczną oraz pomiary w wannie elektrolitycznej,

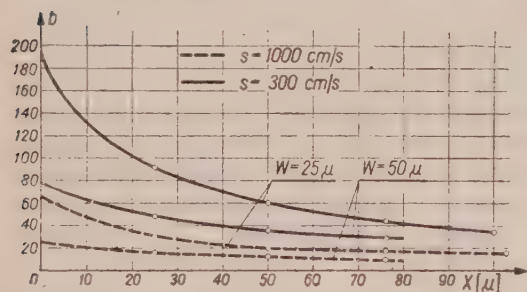
¹ Uwzględnienie rekombinacji objętościowej prowadzi w przybliżeniu do zależności $a = 1 - \frac{s}{K} - \frac{W^2}{2D} = 1 - \frac{s}{K} - \frac{0,075 W^2}{\tau}$. Z przeliczeń wynika, że rekombinacja powierzchniowa jest ok. 10 razy większa od objętościowej dla warunków $\tau = 100 \mu$ sek $s = 330$ cm sek, jest natomiast porównywalna, gdy $s = 33$ cm/sek. W praktycznych przypadkach s jest rzędu od kilkuset do kilku tysięcy, zatem błąd wynikający z pominięcia „objętościowej” straty nośników jest do pominięcia.

wskazują, że zależność $F(s)$ w zakresie $s < 10\,000 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$ da się wyrazić przez

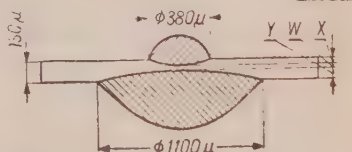
$$F(s) = a\sqrt{s}, \quad (13)$$

gdzie a jest współczynnikiem zależnym od geometrii; zatem

$$b = \frac{K}{s} (1 + a\sqrt{s}). \quad (14)$$



Rys. 5. b w funkcji głębokości wnikania emitera przy zachowaniu $W = \text{const}$.



Rys. 6. Przekrój poprzeczny tranzystora stopowego.

Opierając się na wartościach K i a , znalezionych przez Moore'a, możemy wykreślić a jako funkcję głębokości położenia przejścia przy zadanej odległości między przejściami. Krzywe te (rys. 5) są słuszne jedynie dla tranzystora o wymiarach podanych na rys. 6 i mogą służyć jako obraz zależności a od kształtu przejść.

Wyniki zestawione w punktach 11 i 12 pozwalają wyciągnąć wniosek o konieczności tworzenia płaskich przejść $p-n$.

W rozważaniach zakładano milcząco, że linia przejścia jest gładka, natomiast w praktyce spotyka się przejścia o nieregularnych krawędziach. Efekt ten jest szkodliwy zarówno ze względu na a i f_a , jak również zmniejszenie wytrzymałości tranzystora na przebicie, ponadto przejścia o nieregularnych kształtach utrudniają wykonanie tranzystora o małej grubości bazy oraz zwiększają rozrzut parametrów. Należy zatem do ogólnych wymagań co do kształtu przejść dołączyć jeszcze warunek regularności powierzchni przejścia. Tematem następnej części pracy będzie omówienie wyników badań nad techniką wykonywania przejść spełniających sformułowane wyżej wymagania.

3. TECHNIKA WYKONYWANIA PRZEJŚĆ $p-n$ METODĄ STOPOWĄ

Metoda stopowa tworzenia przejść $p-n$ polega na wprowadzeniu domieszki p do materiału n drogą jego rekryształizacji z przesyconego roztworu półprzewodnika (n) w metalu (p). Proces ten można podzielić na trzy fazy: 1. lutowanie, 2. wtapianie, 3. rekryształizacja.

Etapy te będą niżej omówione, przy czym zagadnienie zawężono do domieszki indowej wprowadzanej do germanu typu n .

3.1. Lutowanie.

Pojęciem tym będziemy obejmowali proces powierzchniowego wiązania kulki indowej z płytką germanową. Jest ono wynikiem zwilżania germanu przez ciekły ind oraz powierzchniowego wtopienia indu. Proces lutowania jest jedną z najważniejszych operacji przy wykonywaniu przejścia. Decyduje on o jednorodności przejścia w płaszczyźnie równoległej do powierzchni płytki oraz o kształcie przekroju poprzecznego.

Aby przejście otrzymane po dalszej obróbce było płaskie, podczas procesu lutowania powinno nastąpić całkowite zwilżenie germanu na określonej powierzchni, natomiast powierzchnia zakryta przez ind nie powinna się zmieniać podczas dalszej obróbki cieplnej. Jednoczesne spełnienie tych dwóch wymagań jest warunkiem koniecznym do uzyskania płaskich przejść o regularnej powierzchni brzegowej.

3.2. Wtapianie indu w german.

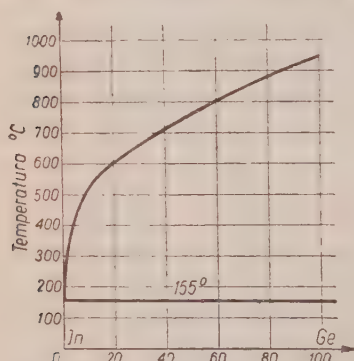
Przylutowany ind podlega wtopieniu w german celem utworzenia przejścia $p-n$ w odpowiedniej odległości od powierzchni płytki. Przebieg tego procesu jest funkcją temperatury, objętości indu, powierzchni zwilżenia oraz orientacji kryształu. Czas trwania wtapiania odgrywa rolę drugorzędną przy założeniu, że proces odbywa się dostatecznie wolno. Jeśli warunek ten nie jest spełniony, głębokość wniknięcia jest również funkcją czasu wtapiania z uwagi na to, że do osiągnięcia stanu równowagi niezbędny jest pewien okres czasu. Szybkość posuwania się czoła cieczy maleje w miarę zbliżania się do stanu nasycenia, toteż praktycznie już przy szybkości podnoszenia temperatury $20^{\circ}\text{C}/\text{min}$, wpływ czasu grzania możemy pominąć [11]. Powolne podnoszenie temperatury umożliwia więc uproszczenie technologii przez wyeliminowanie jednego parametru. Jednocześnie stwarza ono, jak zobaczymy później, warunki do uzyskania prawidłowego kształtu przejścia. Z tych względów w praktyce stosuje się,

począwszy od temperatury lutowania, stopniowe podnoszenie temperatury z szybkością 15 do $20^{\circ}\text{C}/\text{min}$.

3.2.1. Ocena głębokości wnikania.

Ilościową stronę procesu wtapiania ujmuje wykres fazowy układu podwójnego ind-german (rys. 7). Zgodnie z wykresem, dla danej temperatury może istnieć jeden tylko stan równowagi fazy ciekłej (ind + german) z germanem.

Ilość rozpuszczonego germanu w indzie określona jest przez linię liquidusu. Głębokość wnikania cieczy, przy jednostko-



Rys. 7. Wykres fazowy układu ind-german.

wym wzroście temperatury, jest funkcją stosunku objętości indu i powierzchni zwilżania. Zakładając, że wnikanie indu odbywa się w warunkach równowagi fazowej, możemy w przybliżeniu ocenić głębokość wnikania na podstawie analizy wykresu podwójnego. Celem jej ułatwienia będziemy operowali w rozważaniach miarą objętości indu i germanu. Operowanie jednostkami objętości wymaga przeliczenia wykresu fazowego wykreślonego zwykle w procentach atomowych. Rachunek jest prosty i może być przeprowadzony następująco: oznaczając przez N_{Ge} ilość atomów germanu rozpuszczonego w ciekłym indzie, zaś przez $N_{Ge} + N_{In}$ ilość wszystkich atomów w cieczy german—ind, wprowadzamy współczynnik S definiowany jako stosunek

$$S = \frac{N_{Ge}}{N_{Ge} + N_{In}} \quad (15)$$

Wyrażenie to możemy przepisać w postaci zależności

$$N_{Ge} = \frac{S}{1-S} N_{In} \quad (16)$$

Wiemy następnie, że jeśli liczbę Avogadro oznaczmy przez N_A , to ilość atomów N w danej masie możemy wyrazić za pomocą stosunku

$$N = \frac{\text{masa} \times N_A}{\text{gramodrobina}} = \frac{\text{objętość} \times \text{gęstość} \times N_A}{\text{gramodrobina}}$$

Biorąc pod uwagę ostatnie wyrażenie oraz zależność (16), łatwo otrzymujemy związek między objętością germanu V_{Ge} i objętością indu V_{In}

$$V_{Ge} = \frac{S}{1-S} V_{In} \frac{\text{gęstość (In)}}{\text{gęstość (Ge)}} \frac{\text{ciężar at (Ge)}}{\text{ciężar at (In)}} \quad (17)$$

Zależność ta pozwala na określenie objętości germanu przez objętość indu, jeśli znana jest wartość współczynnika S . Po podstawieniu odpowiednich stałych dla indu i germanu podanych w tabelcy 1, wyrażenie (17) przybierze postać:

$$V_{Ge} = 0,870 \frac{S}{1-S} V_{In} \quad (17a)$$

Tabela 1

	Ind	German
Gęstość	7,31 g/cm ³	5,32 g/cm ³
Ciężar atomowy	114,8	72,6

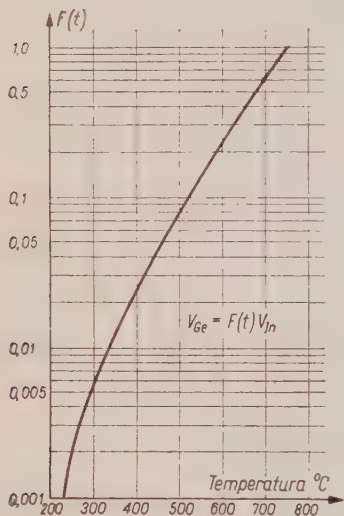
Z uwagi na to, że S jest funkcją temperatury, zależność tę możemy ogólnie zapisać w postaci iloczynu

$$V_{Ge} = F(t) V_{In}, \quad (18)$$

gdzie

$$F(t) = 0,870 \frac{S}{1-S}.$$

Jest to podstawowe równanie wzajemnej rozpuszczalności germanu i indu, słuszne dla stanu równowagi. Wykres funkcji $F(t)$ przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Objętościowa rozpuszczalność germanu w indzie w funkcji temperatury.

Aby dokonać ilościowej oceny głębokości wnikania stopu, musimy założyć kształt obszaru cieczy w germanie. Najbardziej typowy jest wycinek kuli (rys. 9b), ogólnym jednak dążeniem, jak wyżej wspomniano, jest uzyskanie przejść płaskich (rys. 9a); rozważania zostaną zatem przeprowadzone dla obydwu przypadków.

Przejście płaskie [20].

Celem sprecyzowania zagadnienia stosunku powierzchni zwilżania do objętości początkowej indu zakładamy, że w pierwszej fazie ma on postać kuli o średnicy D .

Podczas grzania kulka rozpyływa się zwilżając german i przybiera kształt części kuli (rys. 9). Założenie to jest słuszne dla stosunkowo małych objętości cieczy o dużym napięciu powierzchniowym takim, że siły grawitacji mogą być zaniedbane.

Jest ono spełnione w przypadku kulek indowych o średnicach stosowanych w tranzystorach.

Zgodnie z założeniem, że przejście jest płaskie, przyjmujemy, że rozpuszczony german ma kształt cylindra o średnicy równej średnicy powierzchni styku. Wysokość cylindra oznaczmy przez x . Stopień zwilżania germanu możemy określić bądź za pomocą tzw. stosunku rozpyływania

$K = \frac{D_s}{D}$, bądź też kąta zetknięcia θ zawartego między powierzchnią ger-

manu i płaszczyzną styczną do ciekłego indu (rys. 9). Obie te wielkości określają się wzajemnie jednoznacznie i związek między nimi może być łatwo ustalony.

Oznaczając objętość kulki indowej przed stopieniem

$$V_{In} = \frac{\pi D^3}{6}. \quad (19)$$

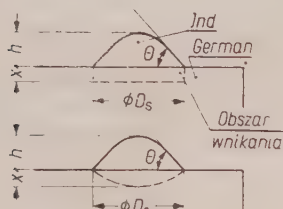
Objętość kulki po stopieniu będzie

$$V_{\text{In}} = \frac{\pi}{6} (h^3 + 3a^2h), \quad \text{gdzie} \quad a = \frac{D_s}{2}, \quad (20)$$

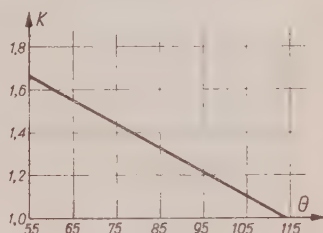
a zapisana jako funkcja θ ma postać

$$V_{\text{In}} = \frac{\pi}{6} \frac{D_s^3}{8} \left[\left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^3 + 3 \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \right]. \quad (21)$$

Obie objętości są oczywiście równe, stąd na podstawie (19) i (21) mamy



Rys. 9. Schematyczne rys. przejścia a) wnikanie płaskie b) wnikanie sferyczne.



Rys. 10. Współczynnik rozprze-strzenia K w funkcji kąta zetknięcia θ .

$$K = \frac{D_s}{D} = 2 \left[\left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^3 + 3 \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \right]^{-\frac{1}{3}}. \quad (22)$$

Zależność (22) przedstawiono na rys. 10.

Objętość rozpuszczonego germanu wynosi

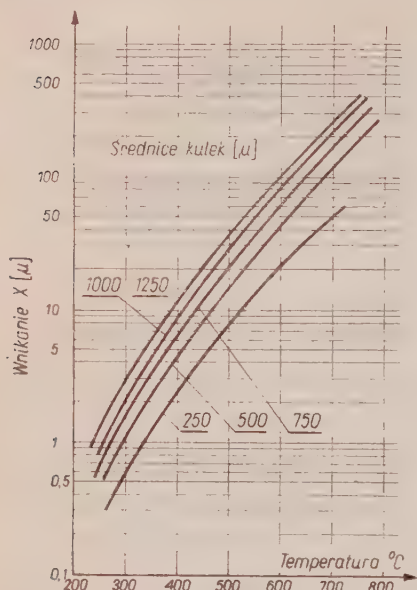
$$V_{\text{Ge}} = \frac{\pi D_s^2}{4} x. \quad (23)$$

Zgodnie z równaniem (18) i (19) mamy na podstawie (23) zależność:

$$\begin{aligned} \frac{\pi D_s^2}{4} x &= F(t) \frac{\pi D^3}{6}, \\ x &= F(t) \frac{2}{3} \frac{D^3}{D_s^2}, \\ x &= F(t) \frac{2}{3} \frac{D}{K^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

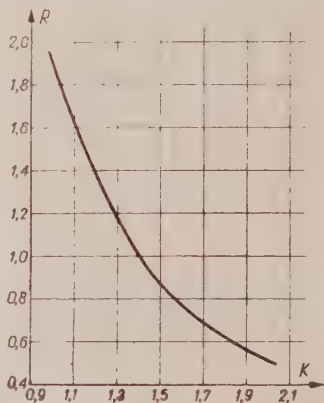
Jest to ogólne równanie głębokości wnikania x jako funkcji temperatury wtapienia i objętości indu. W praktyce wartość θ zawiera się między 60° i 90° zależnie od sposobu wykonywania przejścia, objętości indu i temperatury w czasie zwilżania, oraz wtapienia. Jako przeciętną wartość

(według źródeł amerykańskich) przyjmuje się $\Theta = 77^\circ$, co odpowiada $K = 1,4$. Na podstawie tej wartości wykreślono zależność (24) na rys. 11 dla różnych średnic D .



Rys. 11. Głębokość wnikania w funkcji temperatury i średnicy kulek (przejścia płaskie).

Celem uogólnienia wyników zawartych na rys. 11 podano również czynnik multiplikacyjny R wyrażający poprawkę dla przypadku gdy $K \neq 1,4$ (rys. 12).



Rys. 12. Poprawka R na głębokość wnikania dla $K \neq 1$ (śluzne dla przejść płaskich).

Przejścia sferyczne.

Dla przejścia sferycznego (rys. 9b) równanie (23) przyjmuje postać

$$V_{Ge} = \frac{\pi}{6} (x^3 + 3a^2x), \quad \text{gdzie} \quad a = \frac{D_s}{2},$$

stąd

$$\frac{\pi}{6} (x^3 + 3a^2x) - F(t) \frac{\pi D^3}{6},$$

$$x^3 + 3a^2x - F(t) D^3 = 0.$$

Równanie to ma jedno rozwiązanie rzeczywiste, które według wzoru Cardana da się zapisać jako

$$x = u - v$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + a^6}}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + a^6}}, \quad (25)$$

gdzie

$$A = F(t) D^3.$$

Zależność x w funkcji temperatury dla dwu średnic kulek przedstawiono na rys. 13.

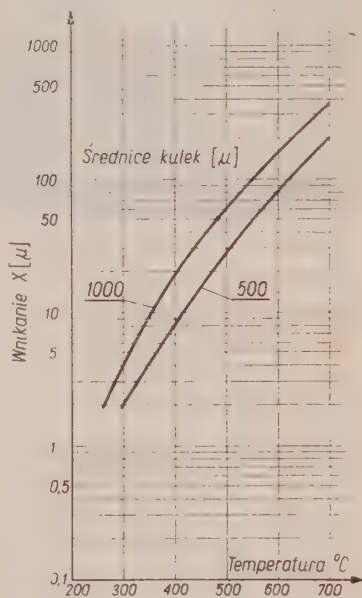
Ponieważ rozpatrzone przypadki obejmują dwa stany graniczne, porównanie wartości na obydwu wykresach pozwala dość trafnie ocenić przeciętną głębokość wnikania. Porównanie krzywych wskazuje również na trudności występujące przy fabrykacji tranzystorów o małej grubości bazy. Końcowa temperatura obróbki termicznej przejścia jest ściśle funkcją jego kształtu, który zależy od wielu czynników, jest na ogół trudny do przewidzenia i kontroli.

3.3 Rekrystalizacja.

Rekrystalizacja rozpuszczonego w indzie germanu jest końcowym etapem tworzenia przejścia.

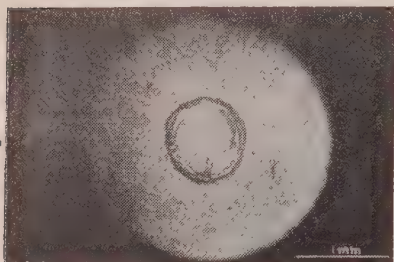
Jak wynika z wykresu fazowego ind-german, obniżenie temperatury powoduje wytrącenie kryształów germanu z roztworu, przez co roztwór ten ubożeje w german i obniża się jego temperatura topnienia. Zgodnie z wykresem, nowo powstałe kryształy powinny być zbudowane z czystego germanu. W rzeczywistości w ich sieć krystaliczną wbudowują się atomy indu zmieniając rodzaj przewodnictwa germanu bez zmiany struktury jego sieci.

Naturalnym zarodkiem w procesie krystalizacji jest pierwotny materiał bazy, toteż przy prawidłowo przeprowadzonym chłodzeniu rekrytalizowane kryształy są przedłużeniem monokryształu bazy. W przypadku orientacji [111] german krystalizuje z przesyconego roztworu w dobrze uporządkowane, zachodzące na siebie płytki, leżące w płaszczyźnie [111]. Dla większej jednolitości i doskonałości kryształu, rekrystalizacja powinna zachodzić w warunkach możliwie najbardziej zbliżonych do stanu równowagi. Konieczny jest do tego stopniowy spadek temperatury. Uważa się, że szybkość 20°C/min daje dostatecznie dobre rezultaty i jest rozsądnym kompromisem między wymaganiami krystalograficznymi i eko-



Rys. 13. Głębokość wnikania w funkcji temperatury i średnicy kulek (przejścia sferyczne).

nomią czasu. Przy wolnym studzeniu, wszystek rozpuszczony w indzie german rekrytalizuje jako monokryształ na germanie bazy, dając jednako grubą warstwą (rys. 14). Eliminuje się wówczas powstawanie dendrytów, usuwając w ten sposób jedno ze źródeł szumów w tranzystorach. Stopniowe obniżenie temperatury zapobiega również powstawaniu rozproszonych kryształitów germanu w indzie, które zwykle utrudniają później lutowanie doprowadzeń. Wymienione zalety wolnego studzenia nie przekreślają celowości stosowania w praktyce studzenia szybkiego.



Rys. 14. Widok wyrekrytalizowanego germanu. Płaskie dno i brak dendrytów uzyskano dzięki wolnemu studzeniu.

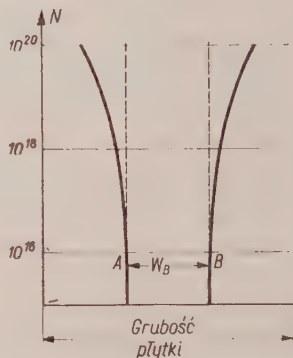
szych, niż przy wolnym studzeniu. Zjawiska te wiążą się prawdopodobnie ze zmianami stałej segregacji K i nie zostały dotychczas wyjaśnione [21]. Obszary, które nie były dokładnie zwilżone, pozostają przy początkowej powierzchni kryształu lub sterczą z wklęsłego dna i są zarodkami podczas rekrytalizacji. Stan ten jest niezwykle niekorzystny, gdyż obszary te mają tendencję wzrostu na boki, przez co powierzchnia ich wzrasta. Z uwagi na ograniczenie płaszczyznami $[111]$ niezwilżone obszary mają zwykle kształt ściętych ośmiościanów.

3.4. Położenie przejścia $p-n$.

Koncentracja atomów indu wbudowanych w german jest funkcją stężenia germanu w roztworze. Przypuszcza się, że rozkład domieszek w wyrekrytalizowanym germanie może być przedstawiony jak na rys. 15 [13]. Przejście powstaje w miejscu, gdzie koncentracje domieszek p i n są równe.

Liczba atomów indu, które mogą być przyjęte przez sieć germanu, jest ograniczona. Zaobserwowano, że dla maksymalnej koncentracji indu oporność właściwa materiału jest ok. $0,003 \Omega\text{cm}$ [17]. Koncentracja ta jest jednak na tyle niska, że materiał pozostaje półprzewodnikiem.

Stopniowe obniżenie temperatury zapobiega również powstawaniu rozproszonych kryształitów germanu w indzie, które zwykle utrudniają później lutowanie doprowadzeń. Wymienione zalety wolnego studzenia nie przekreślają celowości stosowania w praktyce studzenia szybkiego. Stwierdzono, że pozwala ono w pewnych warunkach na uzyskanie przejść o własnościach emisyjnych nie gorszych, a często nawet lepszych, niż przy wolnym studzeniu.



Rys. 15. Rozkład koncentracji indu w germanie n dla przejść stopowych.

Szybkość dyfuzji indu w stałym germanie jest bardzo mała i przesunięcie przejścia wskutek dodatkowej koncentracji atomów wdyfundowanych ocenia się na dziesiątki Å [7]. Podana niżej tablica przedstawia głębokość dyfuzji atomów indu w german dla różnych czasów i temperatur. O położeniu przejścia decyduje zatem jedynie głębokość penetracji stopu. Wniosek ten poparty został przez doświadczenie. Stwierdzono mianowicie na podstawie wyników trawienia, że obszar na zewnątrz przejścia $p-n$ składa się z rekrytalizowanego germanu. Można stąd wnioskować, że przejście będzie bardzo blisko linii solidus-liquidus [17].

Tablica 2

Głębokość wnikania atomów indu w german n

Głębokość wnikania w Å						
$D \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sek}} \right]$	$t (^{\circ}\text{C})$	1 sek	10	10^2	10^3	10^4
10^{-13}	875	800	2500	8000	$2,5 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10$
10^{-14}	700	80	250	800	2500	$8 \cdot 10^2$
10^{-16}	575	8	25	80	250	800

4. WPLYW TECHNOLOGII NA KSZTAŁT PRZEJŚCIA $p-n$

4.1. Zwilżanie germanu przez ind.

4.1.1. Pojęcie swobodnej energii powierzchniowej.

Zagadnienie rozpiływania się ciekłych metali po powierzchniach stałych metali jest problemem złożonym. Decydują o nim niezbyt dotychczas znane fizyczno-chemiczne zjawiska powierzchniowe, trudne do teoretycznego ujęcia i empirycznego zbadania. Szczegółowe omówienie zagadnienia wykracza poza ramy tej pracy; poniżej będą zestawione jedynie uwagi wiążące się z problemem lutowania indu do germanu oraz metodami jego ulepszenia.

Kształt powierzchni cieczy znajdującej się w pewnym ośrodku określony jest przez stan energetyczny układu i decyduje o nim swobodna energia powierzchniowa substancji stykających się ze sobą. Swobodną energią powierzchniową ciała przy stałej temperaturze i ciśnieniu pазzywamy

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)_{p,T} = \gamma, \quad (26)$$

gdzie F — swobodna energia powierzchniowa ciała,

σ — powierzchnia ciała (lub obszaru międzyfazowego),
 γ wyrażona jest w ergach/cm². Wymiar ten odpowiada napięciu powierzchniowemu, dlatego γ zwana jest też często napięciem powierzchniowym.

Energie powierzchniowe są funkcjami sił międzycząsteczkowych, wiążą się z budową ciała i jego właściwościami fizyczno-chemicznymi. Swobodna energia powierzchniowa ciekłych mieszanin metali jest funkcją wzajemnego oddziaływania składników w masie cieczy i warstwie powierzchniowej. Przypuszcza się, że zależy ona głównie od składnika z niższą wartością γ [16]. Jeśli składniki tworzą związki, które są mniej stabilne w warstwie powierzchniowej niż w masie cieczy, swobodna energia powierzchniowa mieszaniny może być wyższa niż czystych składników.

Zmianę γ w funkcji temperatury określa współczynnik termiczny $\frac{d\gamma}{dT}$. Dla wszystkich czystych metali jest on ujemny i zawiera się przeważnie w granicach — 0,1 do — 0,5. Współczynnik ten zależy od objętości atomowej i asocjacji. Termiczny współczynnik swobodnej energii powierzchniowej ciekłych stopów może być zarówno ujemny, jak i dodatni i zależy od zmiany stosunku składników w masie cieczy i jej powierzchni, w miarę wzrostu temperatury. W ogólności można oczekiwać dodatniego współczynnika temperaturowego, gdy stężenie powierzchniowe jednego ze składników jest dużo wyższe niż objętościowe. Wiąże się to z możliwością jego desorpcji z wnętrza ze wzrostem temperatury. Liczbowa wartość $\frac{d\gamma}{dT}$ jest na ogół trudna do określenia, wiadomo jednak, że zmienia się szybko ze zmianą stężenia.

4.1.2. Zwilżanie ciał stałych przez ciecze.

Pod pojęciem zwilżania będziemy rozumieli stan, w którym kąt między powierzchnią cieczy umieszczonej na ciele stałym a powierzchnią ciała stałego jest mniejszy od 90°. Rozważania nad zależnościami energetycznymi układu ciecz—ciało stałe prowadzą do wniosku, że zwilżanie jest możliwe, gdy spełniona jest nierówność

$$dF < 0. \quad (27)$$

Można wykazać, że warunek konieczny, jakkolwiek nie wystarczający do tego aby zależność (27) była prawdziwa, wyraża się w postaci następującego związku między energią powierzchniową ciała stałego γ_s i energią powierzchniową cieczy γ_L :

$$\gamma_s > \gamma_L. \quad (28)$$

Zagadnienie to zostało szeroko omówione w pracy A. Bondiego [16].

Ponieważ wartość energii powierzchniowej zależy od stanu powierzchni danego ciała, czystość tej powierzchni może decydować o przebiegu zwilżania. Szczególnie niebezpieczne są warstwy tlenków, które z racji swej niskiej energii powierzchniowej w znacznym stopniu utrudniają zwilżanie. Jeśli zanieczyszczenia na powierzchni mają charakter nieciągły, może wystąpić lokalne zwilżanie powierzchni przykrytej przez ciecz. Zjawisko to jest spotykane w procesach lutowania przeprowadzanych w technice półprzewodnikowej. Celem ułatwienia zwilżania należy zatem dążyć do maksymalnej czystości stykających się powierzchni. Aby zapobiec utlenianiu względnie aby usunąć już istniejące warstwy tlenku, korzystnie jest przeprowadzać proces w atmosferze redukującej. Powszechnie stosuje się otoczenie układu gazem redukującym lub ciekłym ośrodkiem zwanym topnikiem. Zwykle jest to substancja organiczna lub stopione sole niektórych metali. Zadaniem topnika jest, ogólnie biorąc, związanie chemiczne tlenków; wydaje się jednak, że może on działać również w inny sposób. Pewne fakty wskazują na przykład na to, że w wypadku użycia roztworów solnych zachodzi reakcja wymiany, która ułatwia osadzenie atomów ciekłego metalu na metalu stałym. Zastosowanie topników napotyka na pewne trudności z uwagi na to, że musi on spełniać specjalne wymagania. Topnik powinien być łatwo usuwalny po przylutowaniu indu, lub też musi być substancją nie biorącą udziału w dalszej obróbce przejścia. Topnik nie może ponadto rozpuszczać zbyt dużej ilości indu, gdyż w miejscu, gdzie pozostaje osad powstały wokół kulki, tworzy się przejście o kiepskich własnościach i na niekontrolowanym obszarze. Ostatnia okoliczność zadecydowała o nieprzydatności chlorku cynku $ZnCl_2$ popularnego w technice lutowania. Obecnie znane są już pewne topniki organiczne, które dały wyniki zadowalające [11]. Są one jednak niechętnie stosowane w praktyce, wymagają bowiem dodatkowych operacji oraz przeprowadzania procesu w atmosferze ochronnej. Z tych względów największe zastosowanie jako naturalny środek redukujący znalazł wodór. Wyniki otrzymane w atmosferze wodoru będą przedstawione w punkcie 4.2.

Niezależnie od przestrzegania czystości, zwilżanie może być ułatwione przez zmianę stosunku energii powierzchniowej cieczy do energii powierzchniowej ciała stałego. Zgodnie z warunkiem (28) możliwe są dwa warianty postępowania: zwiększenie energii powierzchniowej ciała stałego lub zmniejszenie energii powierzchniowej cieczy.

Sposób pierwszy opracowany został przez Armstronga [2]. Polega on na pokryciu płytki germanowej cienką warstwą metalu przejściowego łatwo zwilżanego przez ind. Zwykle jest to złoto, nikiel lub srebro nanoszone na german przez naparowywanie. Specyficzną zaletą tej metody jest ułatwienie otrzymywania przejść na ściśle określonym obszarze, czego

nie może zapewnić żaden inny sposób. Do wad jej natomiast należą trudności związane z kontrolą grubości warstwy napyłonej. Ponadto metoda staje się mało przydatna dla tranzystorów o małych powierzchniach przejść na przykład tranzystorów o podwyższonej częstotliwości granicznej.

Zmianę energii powierzchniowej cieczy można uzyskać, zgodnie z tym co powiedziano w punkcie 4.1.1, przez wprowadzenie do niej małych ilości odpowiednio dobranego innego metalu. W naszym przypadku musi on spełniać dodatkowe warunki wynikające z pożądanych właściwości elektrycznych przejścia, oraz wymagań związanych z jego chemiczną obróbką i własnościami mechanicznymi. Wyniki będą podane niżej.

4.2. Wpływ atmosfery redukującej i dodatków stopowych na kształt przejścia.

Stwierdzono wyżej, że warunkiem koniecznym do otrzymania płaskich przejść $p-n$ jest zapewnienie dobrego zwilżania powierzchni germanu przez ciekły ind. Zagadnienie zwilżania zostało szeroko omówione w p. 3.1. Wykazano w nim, że zwilżanie może być ułatwione przez zmianę atmosfery nad układem ciała stałe — ciecż lub przez wprowadzenie dodatków stopowych do indu. Przypuszcza się ponadto, że wprowadzenie domieszek do indu może wpłynąć na spłaszczenie przejścia $p-n$ dzięki osłabieniu rozpuszczalności germanu i zwolnieniu procesu zwilżania.

Biorąc to pod uwagę przeprowadzono następujące doświadczenia:

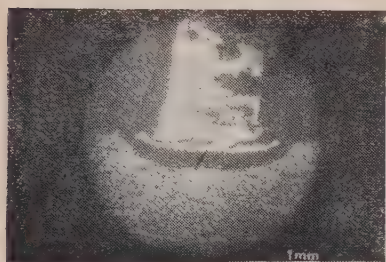
1. wykonano przejścia $p-n$ w piecu próżniowym, wtapiając w german ind z domieszkami:

złoto	0,99% at,
cynk	1,75% at,
german	4,8% at,
ołów	5% at,
2. wykonano przejścia $p-n$ w atmosferze wodoru wtapiając w german czysty ind oraz ind z dodatkiem ołowiu 10% i 90%,
3. wykonano przejścia w atmosferze wodoru wtapiając ind z dodatkiem cynku przy użyciu topnika.

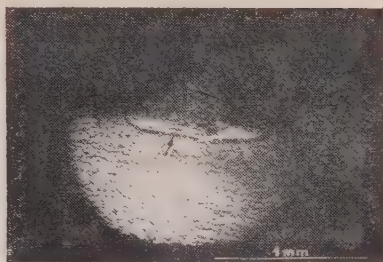
Wybór wymienionych wyżej domieszek oparty był bądź na podstawie spostrzeżeń dokonanych w toku prac nad tranzystorem warstwowym w Zakładzie Elektroniki bądź też sugestii w literaturze [1], [2], [10], [11]. Procent domieszek w poszczególnych stopach ustalono pod kątem przydatności stopu do celów tranzystorowych zarówno pod względem właściwości elektrycznych, jak i mechanicznych.

4.2.1. Kształt przejść wykonanych w próżni przy użyciu indu z dodatkami stopowymi.

Kształty przejść $p-n$ otrzymanych przez wtapienie indu z różnymi domieszkami przedstawiono na fotografiach 16a, b, c, d, f. Wydaje się, że



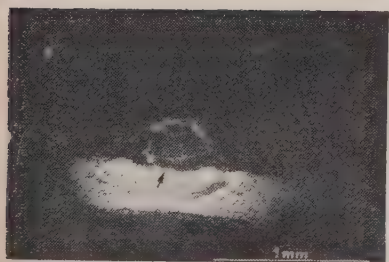
a. Czysty ind.



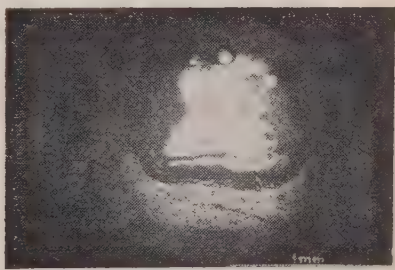
b. Ind+0,99% at złota.



c. Ind+1,75% at cynku.



d. Ind+5% at ołowiu.



e. Ind z domieszką germanu (4,8% at)

Rys. 16. Obrazy przekrojów przejść $p-n$ utworzonych przez wtopienie indu z domieszkami w german typu n w próżni $5 \cdot 10^{-4}$ Tr.

na podstawie przeprowadzonych obserwacji można wyciągnąć następujące wnioski:

ind czysty: przejście $p-n$ jest sferyczne, często występuje wybrzuszenie w środkowej części, spotyka się obszary niezwilżone (rys. 17).

ind—złoto: nie widać istotnej poprawy kształtu przejścia. Pozostaje ono sferyczne. Cechą charakterystyczną jest brak obszarów nie-

zwilżonych (rys. 18). Być może, że zwiększenie procentu złota dałoby wyniki bardziej wyraźne. Stwierdzono jednak, że już przy 2% at złota



Rys. 17. Obraz źle zwilżonej powierzchni germanu.



Rys. 18. Typowy obraz dobrze zwilżonej powierzchni germanu.

kryształy złota wykrystalizowujące w indzie w znacznym stopniu utrudniają trawienie i lutowanie doprowadzeń.

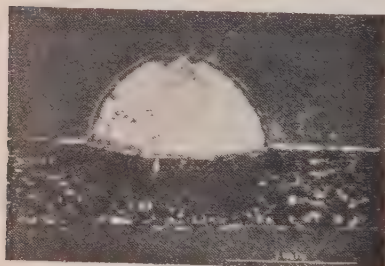
ind — cynk: przejścia nie odbiegają na ogół kształtem od indowych.

ind — ołów: bardzo widoczne osłabienie wnikania stopu, przejścia są nadal sferyczne. Zaobserwowano dobre zwilżanie. Jest rzeczą prawdopodobną, że zwiększenie ilości ołowiu pozwoli na uzyskanie przejść bardziej płaskich.

ind — german: przejścia mają typowe wybrzuszenie w środkowej części. Zwilżanie germanu przez ciecz ind — german jest słabe. Często obserwowano obszary niezwilżone. Stop indu z germanem jest kruchy i niejednorodny (z indu sterczą kryształy germanu), narzuca to górną granicę procentu zawartości germanu 5% at.

4.2.2. Kształt przejść wykonanych w atmosferze wodoru drogą wtopienia indu i stopu ind — ołów.

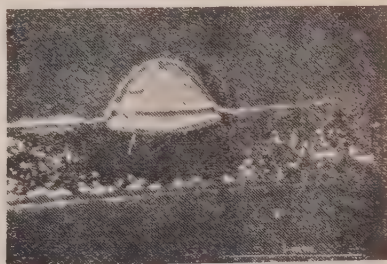
Przejścia wykonane w atmosferze wodoru są powierzchniami znacznie bardziej regularne od tych, które wykonano w próżni. Na ogół nie spotyka się obszarów niezwilżonych. Nie zaobserwowano również charakterystycznego wybrzuszenia występującego w przejściach wykonanych w próżni (rys. 16). Wydaje się, że przejścia są bardziej płaskie niż te, które utworzono w próżni. Typowe przejście otrzymane przez wtopienie indu przedstawione jest na rys. 19.



Rys. 19. Typowy obraz przekroju przejścia p — n otrzymanego przez wtopienie indu w atmosferze wodoru.

Dodawanie ołowiu do indu znacznie poprawia kształt przejścia. Fotografia (rys. 20a) przedstawia typowy obraz

przekroju przejścia otrzymanego przez wtopienie indu z dodatkiem 90% ołowiu. Dla porównania pokazano obok fotografię przejścia wykonanego w tych samych warunkach, lecz przy użyciu czystego indu (rys. 20b). Cechą charakterystyczną jest znaczne osłabienie wnikania stopu ind—



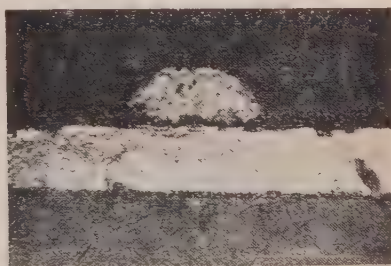
Rys. 20. Obrazy przejść $p-n$ otrzymanych w temperaturze 625°C w atmosferze wodoru.

a. wtopiono ind+90% ołowiu

b. wtopiono czysty ind

(Uwaga. Objętość kulki ind+90% ołowiu była mniejsza od kulki z czystego indu)

ołów. W przeciwieństwie do przejść czysto indowych, płaski kształt przejścia ind—ołów zachowuje się również wówczas, gdy zostanie ono utworzone stosunkowo głęboko pod powierzchnią. Fotografia (rys. 21) pokazuje obraz przekroju przejścia wykonanego w odległości 60μ od po-



Rys. 21. Głęboko położone przejście $p-n$ (60μ) powstałe w wyniku wtopienia indu z ołowiem (90%) w wysokiej temperaturze (660°C). Fotografię uzupełniono na podstawie obrazu widzianego przez mikroskop.

Rys. 22. Obraz przejścia $p-n$. Materiałem wtapianym jest ind z 10% domieszką ołowiu.

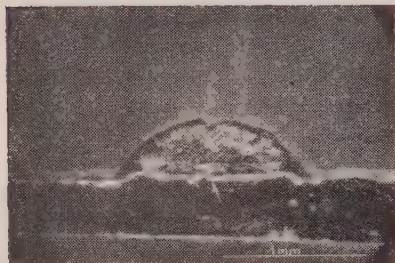
wierzchni płytki. Ujemną stroną stosowania stopu ind—ołów jest jego twardość, trudności przy montażu i trawieniu. Obniżenie zawartości ołowiu w znacznym stopniu zmniejsza te wady. Stwierdzono, że jeszcze przy zawartości 10% ołowiu kształt przejścia jest zadowalająco płaski (rys. 22).

3.2.3. Kształt przejść p-n wykonanych w atmosferze wodoru przy użyciu topnika.

Doświadczenie wykonano w oparciu o przepis podany przez RCA [11]. Wtapiano ind z domieszką 1,75% cynku. Jako topnika użyto substancji o następującym składzie:

Ammonium chloride	NH_4Cl	2 gramy
Hydrazine monohydrobromide	$\text{N}_2\text{H}_4\text{HBr}$	2 gramy
Methanol	CH_3OH	10 cm^3
Woda	H_2O	5 cm^3
Glycerin	$\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$	1 cm^3

Otrzymane przejścia są zadowalająco płaskie (rys. 23). Technika ta jest jednak kłopotliwa z uwagi na konieczność dodatkowego trawienia płytek po procesie lutowania. Zastosowanie topnika wymaga ponadto specjalnego przyrządu do lutowania kulek.



Rys. 23. Obraz przejścia p-n otrzymanego przez wtopienie indu z domieszką cynku (1,75%) przy użyciu topnika.

4.3. Zagadnienie zmiany powierzchni zwilżania podczas obróbki termicznej.

Powierzchnia zwilżonego obszaru nie powinna się zmieniać podczas dalszej obróbki termicznej. Powiększenie tego obszaru w miarę podnoszenia temperatury prowadzi do zaokrąglenia bocznych ścian przejścia

i uniemożliwia uzyskanie przejść o równoległych powierzchniach. Zmniejszenie kąta zetknięcia ze wzrostem temperatury jest naturalnym wynikiem zmiany stanu energetycznego powierzchni indu i germanu. Zjawisku temu można zapobiec przez sztuczne ukształtowanie czaszy indowej drogą przyciskania kulki. Kąt zetknięcia tej czaszy Θ winien spełniać zależność:

$$\Theta < \Theta_{t \max}. \quad (29)$$

gdzie $\Theta_{t \max}$ jest kątem przy maksymalnej temperaturze obróbki przejścia. Wymagany kształt indu otrzymuje się przez odpowiednie ukształtowanie szablonu przyciskającego kulkę do płytki. Liczne próby wskazują na poprawienie zwilżania przy zastosowaniu nacisku na kulkę, toteż metoda ta jest stosowana powszechnie przy tworzeniu przejść stopowych.

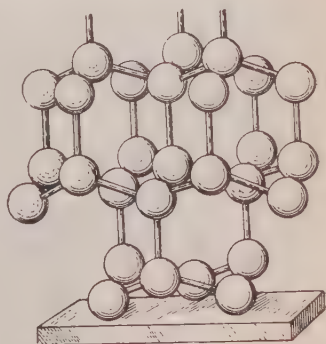
Zachowanie kształtu czaszy podczas dalszej obróbki cieplnej jest łatwiejsze, gdy jest ona przeprowadzona w atmosferze lekko utleniającej. Powierzchniowe utlenienie indu zapobiega dalszemu zwilżaniu. Praktycznie warunek ten spełniony jest w normalnie spotykanych stanowiskach próżniowych.

4.4. Wpływ orientacji kryształu i obróbki cieplnej na kształt powierzchni liquidus—solidus.

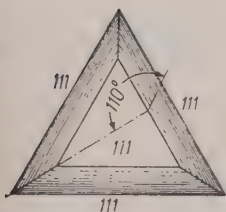
Wtapianie indu w german jest procesem rozpuszczania podobnym pod wieloma względami do trawienia germanu przez kwas. Stopień wnikanie jest różny dla różnych płaszczyzn krystalicznych, toteż orientacja kryształu ma istotny wpływ na kształt przejścia i musi być brana pod uwagę przy jego wykonywaniu.

Konieczność tworzenia przejść płaskich sugeruje wykorzystanie płaszczyzny [111], której budowa zapewnia najbardziej płaskie wnikanie stopu. Przyczynę tej własności wyjaśnia rys. 24. Płaszczyzna [111] jest najgęściej upakowaną płaszczyzną kryształu germanu. Atomy leżące w tej płaszczyźnie związane są razem przez 3 wiązania, podczas gdy atomy sąsiednich płaszczyzn [111] powiązane są jedynie przez pojedyncze wiązania najłatwiejsze do usunięcia. Rezultatem takiego układu sił jest rozpuszczanie kryształu drogą złuszczenia kolejnych warstw atomów leżących w płaszczyźnie [111]. Rozpuszczanie takiej warstwy jest dość trudne z uwagi na silne powiązanie atomów, toteż w konsekwencji uzyskujemy powolne i płaskie wnikanie stopu. Zatem płaszczyzna [111] działa jako naturalny środek spłaszczający przejście.

Podany obraz jest tym mniej zniekształcony im warunki procesu są bardziej zbliżone do stanu równowagi. Wynika stąd konieczność powolnego wzrostu temperatury. Stwierdzono, że szybkość $20^{\circ}/\text{min}$ daje wyniki zadowalające.



Rys. 24. Model siatki kryształu germanu.



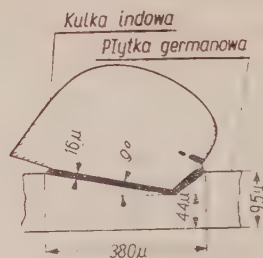
Rys. 25. Płaszczyzna [111] widziana od góry.

Kryształ germanu posiada cztery płaszczyzny [111]. Ich wzajemne usytuowanie łatwo jest określić pamiętając, że oś (111) wytyczona jest przez kierunki wiązań. Zbiór płaszczyzn przecina się tworząc piramidę ze ściętym wierzchołkiem, jak pokazano na rys. 25. Ograniczając działanie płaszczyzn [111] powinno się zatem uwidocznienie również w bocznych ścianach przejścia. Zjawisko to możemy zaobserwować na przytoczonych fotografiach przejść wykonanych w Zakładzie Elektroniki. Szczególnie wyraźnie występuje ono na rys. 26, na którym widzimy zarówno płaskie dno przejścia, jak i skośną ścianę boczną. Tworzy ona z podstawą kąt 110° , zgodnie z kątem zaznaczonym na rys. 25. Działanie

płaszczyzny [111] widać plastycznie na rys. 27 zrobionym na podstawie fotografii wykonanej w RCA Laboratory [11]. Przedstawia on przejście



Rys. 26. Przekrój przejścia p—n wykonanego na płytce cietej w płaszczyźnie [111].



Rys. 27. Wpływ orientacji kryształu.

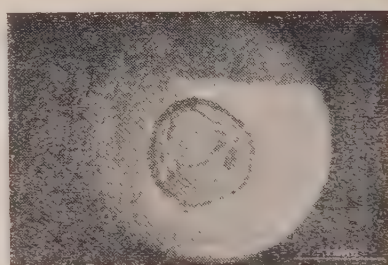
p—n wykonane na płytce wyciętej pod kątem 9° do płaszczyzny. Podobne przejście otrzymano w Zakładzie Elektroniki (rys. 28). Płytkę wyciętą była pod kątem ok. 5° w stosunku do płaszczyzny [111]. Ograniczający



Rys. 28. Przekrój przejścia p—n wykonanego na płytce cietej pod kątem $\sim 5^\circ$ w stosunku do płaszczyzny [111].



Rys. 29. Ilustracja spłaszczającego działania płaszczyzny [111].

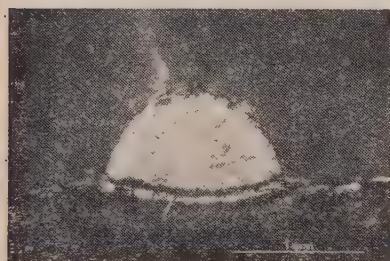


Rys. 30. Obraz wykrystalizowanego germanu, trójkątny kształt przejścia p—n jest typowy dla płaszczyzny [111].

wpływ bocznych płaszczyzn [111] daje szkodliwe efekty, jeśli pod czaszą indową pozostały niezwilżone miejsca. Przybierają one wówczas kształt naszkicowanej wyżej piramidy, uniemożliwiając podcięcie i stopienie niezwilżonego obszaru. Udział niezwilżonych obszarów w ogólnej powierzchni przejścia maleje w miarę posuwania się frontu cieczy w głąb płytki germanowej.

4.5. Wpływ maksymalnej temperatury obróbki i średnicy czaszy indowej na kształt przejścia $p-n$.

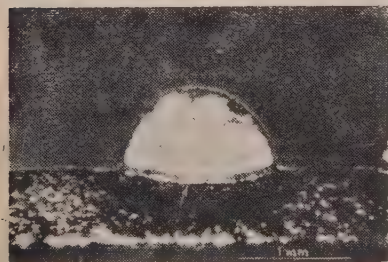
Obserwacje przeprowadzone na przekrojach przejść $p-n$ wykonanych w różnych temperaturach wskazują na istnienie tendencji zaokrąglenia



Rys. 31. Przejście $p-n$ wykonane w temp. 475°C. Wtapiano czysty ind.



Rys. 32. Przejście $p-n$ wykonane w temp. 420°C. Czysty ind. Objętość kulki mniejsza niż na fot. 6.



Rys. 33. Obrazy przejść $p-n$ wykonanych w tej samej temperaturze (475°C) lecz przy użyciu różnych objętości indu. Kulka o średnicy 1,1 mm.



Rys. 34. Obrazy przejść $p-n$ wykonanych w tej samej temperaturze (475°C) lecz przy użyciu różnych objętości indu. Kulka o średnicy 0,57 mm.

przejścia w miarę podnoszenia końcowej temperatury obróbki. Dla ilustracji przytoczono fotografię przekroju przejścia wykonanego w temperaturze 420°C i 475°C (rys. 31 i 32)². Podobne zjawisko obserwuje się

² Z uwagi na różne objętości wtopionego indu rys. 31 i 32 nie mogą stanowić podstawy do oceny głębokości wniknięcia stopu.

wtapiając różne objętości indu w tej samej temperaturze (rys. 33, 34). Wydaje się, iż można ogólnie powiedzieć, że przejścia są tym bardziej płaskie, im bliżej powierzchni zostały utworzone. Wypadkiem idealnym byłoby zatem tworzenie przejść bezpośrednio przy powierzchni płytki. Na przeszkodzie stoi tu jednak znany z doświadczenia fakt, że przejścia wykonane przy zbyt niskich temperaturach mają kiepskie właściwości elektryczne. Konieczny jest zatem pewien kompromis w doborze warunków procesu technologicznego i konstrukcji. Sytuację można ułatwić przez zmianę stosunku objętości indu do powierzchni na jakiej styka się z germanem lub też przez dodanie składnika, który utrudniałby wnikanie indu. Z doświadczenia wiadomo, że składnikiem tym może być z powodzeniem ołów. Zalety stosowania stopu ind—ołów omówiono w p. 4.2.2.

5. OPIS PRZEPROWADZONYCH DOŚWIADCZEŃ

5.1. Przygotowanie materiału.

Płytkę germanu pocięto na paski o wymiarach $10 \times 3 \times 1$ mm, oszlifowano na proszku alundum i wytrawiono w CP-4. Ind wraz z domieszkami uformowano w kulki przez przetopienie w próżni. Kulki były następnie kalibrowane, trawione w roztworze wodnym HCl i płukane. Kulki używane do prób w atmosferze wodoru były bezpośrednio przed przylutowaniem dodatkowo przetopione w wodorze.

5.2. Wykonanie przejść p—n.

Przejścia wykonano na stanowiskach używanych w technologii tranzystorów. Temperaturę mierzono za pomocą termopary Fe—Ni z dokładnością do 10°C .

Proces przeprowadzony w próżni rozbity był na 2 etapy: a) lutowanie, b) wtapianie.

Lutowanie przeprowadzono w specjalnym adapterku. Powtarzalność procesu zapewniono przez dociśnięcie kulek do płytki germanowej.

Po przylutowaniu kulek, bezpośrednio przed wtapianiem, próbki wytrawiono w HCl i CP-4. W procesie przeprowadzonym w atmosferze wodoru kulki leżały swobodnie na powierzchni germanu. Doprowadzenia bazy i elektrod wykonano w sposób analogiczny do stosowanego w technologii tranzystorów.

5.3. Mikroskopowe badanie przekrojów przejść.

Próbki przygotowane w opisany wyżej sposób były zamykane w żywicy epoksydowej. Szlifowano je następnie na papierze ściernym i polerowano na płytce żeliwnej przy pomocy alundum (Al_2O_3). Przez cały czas szlifowania i polerowania zwracano uwagę na zachowanie stałego kierunku ruchu próbki.

Po wypolerowaniu próbka była myta w wodzie, a następnie trawiona przez kilka sekund w mieszance trawiącej CP-4. Linie przejścia w tak przygotowanej próbce można ujawnić wieloma metodami. Ogólnie możemy je podzielić na dwie grupy: metody chemiczne i metody elektrolityczne.

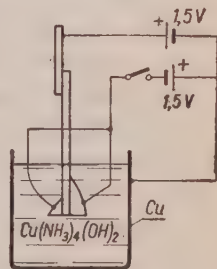
Metody chemiczne wykorzystują zjawisko różnej szybkości trawienia obszaru *p* i *n* w odpowiednio dobranych mieszankach [6]. Uzyskane tą drogą obrazy są stosunkowo mało kontrastowe i interpretacja ich sprawia trudności.

Metody elektrolityczne opierają się na istnieniu bariery między obszarem *p* i *n* oraz w pewnych wypadkach między powierzchnią germanu *n* i elektrolitem. Z samej zasady tej techniki wynika, że kontury przejścia powinny być wyraźniejsze i bardziej jednoznaczne od poprzednich.

Wobec trudności jakie sprawiały różnice w trawieniu indu z różnymi domieszkami, przy badaniu próbek stosowano kilka metod trawienia elektrolitycznego i chemicznego. Poniżej przedstawiono metody wykorzystane w niniejszej pracy.

5.3.1. Metoda elektrolitycznego nakładania miedzi [11].

Próbkę trawimy przez kilka sek. w mieszance zawierającej: 5 części HNO_3 , 5 części HF i 2 części wody. Po wytrawieniu płytkę płuczemy w wodzie i przemywamy alkoholem. Następnie łączymy ją w układzie pokazanym na rys. 35 i po zanurzeniu w roztworze $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4(\text{OH})_2$ włączamy kilkakrotnie napięcie na czas 1—2 sek. Próbkę płuczemy wodą i suszymy. Przejście ujawnia się dzięki selektywnemu trawieniu obszaru *p* i pokryciu go miedzią. Metoda ta daje na ogół kontrastowe obrazy obszaru *p* i *n*, jest jednak trudna i kłopotliwa. Wymaga dobrych właściwości prostujących przejścia, małej oporności obszaru między przejściem i doprowadzeniem bazy, oraz właściwie przygotowanego elektrolitu. Jeżeli warunki te nie są spełnione, miedź osadza się również na obszarze *n* w postaci nieregularnych plam i zaciera zupełnie granice przejścia.



Rys. 35. Schemat układu do ujawniania przejść metodą nakładania miedzi.

5.3.2. Metoda selektywnego trawienia obszaru *p*.

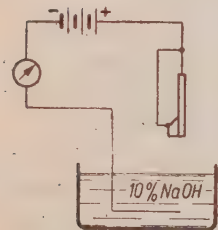
Jest to wariant metody trawienia opisaney przez R.W. Jacksona [8]. Metoda opiera się na następujących właściwościach powierzchni próbki:

1) Z pracy Gunn'a [22] oraz Brattain'a i Garrett'a [23] wynika, że german *n* tworzy prostującą barierę przy zetknięciu z elektrolitem, podczas gdy obszar *p* tworzy niskoomowy kontakt lub barierę o słabych właściwościach prostowniczych.

2) Obszar p w przejściach stopowych ma oporność o wiele niższą od obrazu n .

Dzięki tym własnościom, przyłożenie napięcia dodatniego do kulki indowej pociąga za sobą nierównomierny rozkład gęstości prądu, którego przeważająca część płynie do obszaru p . W wyniku otrzymujemy selektywne trawienie obszaru p .

Próbkę łączymy w układzie jak na rys. 36. Przepuszczamy kilka impulsów prądu o natężeniu ok. 2 A, czas trwania impulsu ok. 0,5 sek. Od strony czaszy indowej otrzymujemy wyraźnie wytrawiony obszar. Stwierdzono empirycznie przy pomocy pomiarów sondą cieplną oraz przez porównanie z obrazami otrzymanymi przy pomocy innych metod, iż linia między obszarem wytrawionym i nie trawionym jest odwzorowaniem linii przejścia. Przesunięcie między obydwoma liniami rośnie w miarę wzrostu czasu trawienia.



Rys. 36. Schemat połączeń przy trawieniu elektrolitycznym.

Zaletami tej metody jest prostota (nie wymaga polerowania próbek) oraz możliwość badania kształtu przejść leżących tuż pod powierzchnią. Jej poważną wadą jest to, że nie daje pojęcia o głębokości położenia przejścia.

5.3.3. Trawienie chemiczne.

Spśród wszystkich mieszanek chemicznych używanych do trawienia przejścia najczęściej używane są następujące:

1. 5 części HNO_3 , 5 części HF , 1 część H_2O ,
2. CP-4 (Chemical Polishing Nr 4).

Trawienie w tych mieszanekach pozwala odkryć rzeczywistą linię przejścia. Wadą metody chemicznej jest mała kontrastowość obrazu, jeżeli próbka nie jest dostatecznie dobrze wypolerowana. Najlepsze wyniki otrzymano przez połączenie metody chemicznej z elektrochemiczną.

5.3.4. Obserwacja powierzchni przejścia.

Ujemną stroną badania przejść za pomocą przekrojów jest to, że obserwujemy je w jednej płaszczyźnie. Aby poznać całą powierzchnię przejścia należałoby dokonywać obserwacji kolejnych przekrojów przejścia wzdłuż kierunku prostopadłego do płaszczyzny przekroju. Z uwagi na uciążliwość tej metody przeprowadza się obserwację rekrytalizowanego obszaru p przez usunięcie indu. Pozwala ona na określenie jakości rekrytalizacji oraz zwilżania germanu, nie pozwala natomiast na bezpośrednie badanie powierzchni przejścia. Ind usuwamy drogą trawienia, które nie atakuje germanu. Można do tego celu użyć stężony kwas solny lub rtęć. Rtęć działa szybciej, lecz musi być usunięta z germanu przez trawienie

w kwasie azotowym. Rekrytalizowany obszar może być obserwowany pod mikroskopem przy pionowym oświetleniu (jeśli płaszczyzna płytki pokrywa się z [111]). Miejsca niezwilżone są zwykle łatwe do wykrycia, gdyż budowa ich powierzchni różni się od rekrytalizowanych kryształów. Obraz powierzchni niezwilżonej jest zwykle taki sam jak germanu na zewnątrz przejścia (rys. 17). Czasami rekrytalizowane kryształy zamykają niezwilżony obszar. W tych wypadkach kryształy te muszą wystawać ponad powierzchnię płytki, zdradzając obecność niezwilżonego obszaru.

6. WNIOSKI

Przejścia $p-n$ wykonywane do celów tranzystorowych powinny odznaczać się płaskim dnem położonym w kontrolowanej odległości od powierzchni płytki. Prawidłowy kształt przejścia $p-n$ można zapewnić przez właściwą orientację płaszczyzny płytki, dobre zwilżanie germanu przez ind i umiejętne wtapienie indu.

Spśród możliwych cięć kryształu najbardziej odpowiednie wydaje się wycinanie płytek w płaszczyźnie [111]. Dobre zwilżanie można otrzymać przez zapewnienie odpowiedniej czystości stykających się powierzchni. Szczególnie szkodliwe są tlenki. Celem ich uniknięcia korzystnie jest przeprowadzać proces w atmosferze wodoru. Dobre wyniki otrzymuje się również stosując topniki, ale pociąga to za sobą dodatkowe trudności. Domieszki w indzie mogą ułatwiać zwilżanie. Doświadczenie wskazuje, że najbardziej odpowiednią domieszką, spośród zbadanych, jest ołów. Wielkość zwilżonej powierzchni nie powinna się zmieniać w czasie dalszej obróbki termicznej. Można to zapewnić przez odpowiednie ukształtowanie czasz indowych lub wprowadzenie atmosfery lekko utleniającej.

Wtapienie indu w german przebiega prawidłowo gdy temperatura podnoszona jest z szybkością nie większą niż $15^{\circ}\text{C}/\text{min}$. Również proces rekrytalizacji germanu rozpuszczonego w indzie powinien być przeprowadzony dostatecznie wolno, aby uniknąć powstawania dendrytów. Szybkie studzenie ma jednak pewne zalety związane ze wzrostem stałej segregacji oraz ekonomią czasu.

Kształt przejścia $p-n$ związany jest w pewien sposób z głębokością na jakiej zostało utworzone. Stwierdzono, że przejścia leżące bliżej powierzchni są bardziej płaskie.

Wprowadzenie pewnych dodatków stopowych do indu wpływa na kształt przejścia. Szczególnie dobre wyniki otrzymano dodając do indu ołów w ilości od 10 do 90%.

WYKAZ LITERATURY

1. Armstrong L. D., Carlson C. L., Bentivegna M.: *P-n-p transistors using high-emitter-efficiency alloy materials*. RCA Rev., March 1956.
2. Armstrong L. D.: Proc. IRE 10, Nr 11, 1314—1342, 1952.
3. Billig E., Dewid J. J.: *P-n junctions revealed by electrolytic etching*. Nature, July 18, s. 115, 1953.
4. Dunlap W. C.: *Methods of preparing p-n junctions*. Handbook of semiconductor electronics.
5. Ebers J. J.: *Alloyed junction transistor development*. Bell. Lab. Recond, January 1956.
6. Ellis S. G.: *Microscopic examination of germanium crystals and transistors*. Transistors I.
7. Herold E. W.: *New advances in the junction transistor*. British J. of Applied Phys. Nr 4, 1954.
8. Jackson R. W.: *Simple method of revealing p-n junctions in germanium*. Journal of Applied Phys., March 1956.
9. Kansas R.: *On the high-frequency performance transistor*. PIRE, December.
10. Mueller C. W., Pankove J. I.: *A p-n-p alloy junction transistor for radio-frequency amplification*. RCA Review, December 1953.
11. Mueller C. W., Ditrick N. H.: *Uniform planar alloy junctions for germanium transistor*. RCA Review, March 1956.
12. Pankove J.: *Methods for revealing p-n junctions and inhomogeneities in germanium crystals*. RCA Review 16 March, Nr 1, 1955.
13. Rosiński W.: *Tranzystory i ich układy*. Warszawa, 1956.
14. Slade B. N.: *Recent advances in power junction transistors*. Transistors I.
15. Seltz F.: *The physics of metals*.
16. Bondi A.: *The spreading of liquid metals on solid surfaces*. Chemical Reviews, April 1953, Vol. 52.
17. Pankove J.: *Recrystallization of germanium from indium solution*. RCA Review, March 1954.
18. Smith K. D.: *Properties of junction transistors*. Tele-Tech., Jan. 1953.
19. Stripp K. F., Moore A. R.: *The effects of junction shape and surface recombination on transistors current gain*. Część I and II, PIRE, July and June 1954.
20. Pensak L.: *Calculation of alloying depth of indium in germanium*. Transistors I.
21. Hunter: *Handbook of semiconductor electronics*.
22. Gunn J. B.: Proc. Phys. Soc., London B 67, 409, 1954.
23. Brattain W. H., Garret C. G. B.: Bell System Techn. Journ., J. 34, 129, 1955.
24. Steele E. L.: *Theory of alpha for p-n-p diffused junction transistors*. PIRE, November 1952.

ТЕХНОЛОГИЯ $p-n$ ПЕРЕХОДОВ СПЛАВЛЕНИЙ
С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИХ ФОРМЫ

Резюме

Обсуждено влияние переходов формы $p-n$ на значение предельной частоты и коэффициента усиления по току транзисторов изготовленных техникой сплавления. Доказано, что необходимым условием для достижения высокого

значения этих двух параметров является образование плоских переходов $p-n$ эмиттера и каллоктора.

Кратко описан процесс изготовления — переходов по методам сплавления с выделением трех последовательных фаз — паяния, сплавления и рекристаллизации.

Форма получаемых переходов тесно связана со смачиванием германия расплавленным металлом и со скоростью сплавления этого металла. Она зависит также от глубины, на которой образован переход, и от ориентировки плоскости пластинки по отношению к кристаллографической оси. Обсужден вопрос смачивания с физической точки зрения. Хорошее смачивание можно получить, обеспечив надлежащую чистоту соприкасающихся поверхностей. Особенно вредными являются здесь окиси. Для их удаления удобно производить процесс сплавления в атмосфере водорода или в присутствии флюса окружающего соприкасающиеся поверхности. Смачивание можно также облегчить введением в индий небольшого процента металлов, снижающих его поверхностную энергию. Произведенные опыты доказали, что наиболее соответствующей примесью является свинец.

Процесс сплавления проходит правильно, если он протекает достаточно медленно. Этот режим можно получить путем медленного повышения температуры или путем введения в индий металла затрудняющего плавление германия. Из произведенных опытов следует, что примесь свинца значительно облегчает получение плоских $p-n$ переходов.

Обсуждено влияние ориентировки пластинки германия на форму перехода и доказано, что наиболее соответствующей для исполнения плоских переходов является плоскость [111]. Опытным путем констатировано, что получаемые переходы тем более плоские, чем они ближе поверхности. Глубину сплавления можно регулировать, подбирая температуру процесса или объем расплавленного металла.

В заключении описаны произведенные опыты и даны методы обнаружения $p-n$ переходов.

TECHNOLOGY OF $p-n$ ALLOY JUNCTION FROM STANDPOINT OF THEIR SHAPE

Summary

The influence of the shape of $p-n$ junctions on alpha-cut off frequency value and the short-circuit current amplification factor α of the transistors made by alloy technique is discussed. It has been proved that the formation of flat $p-n$ junctions is the necessary condition in obtaining high values of both above parameters.

A concise description of production process of $p-n$ junctions by the alloy method, distinguishing such three phases as soldering alloying and recrystallization is then given.

The shape of obtained junctions is closely linked with the germanium wetting by the alloyed metal and the alloying process of that metal.

It depends, moreover, on the depth of junction formation and the orientation of the plane of wafer with regard to the crystallographic axis. The spreading problem from physical point of view is then examined.

A good spreading may be obtained if appropriate purity of the contacting surfaces is preserved. The oxides are particularly detrimental. In order to extract

the oxides it is more advantageous to carry out the process in atmosphere of hydrogen or to protect the contacting surfaces with the flux. The spreading may be equally facilitated by adding to the indium small portion of the metals reducing the surface energy.

The alloying process progresses correctly if it proceeds slowly enough. This may be achieved through a slow temperature rise or by introducing into the indium a metal hindering the germanium dissolving. It follows from the performed experiments that lead addition facilitates remarkably the obtaining of the flat $p-n$ junctions.

The influence of the plane orientation of the germanium wafer on the shape of the junction is then discussed and it is proved that the most suitable plane for the formation of the flat junctions is that of [111]. The experiments prove that the obtained junctions are as much flatter as much closer to the surface they have been formed. The depth of penetration (the alloying front) may be controlled through selection of the process temperature or the volume of the alloyed metal.

In concluding part of the paper the performed experiments records are described and the method of revealing of $p-n$ junctions is given.

621.316.825.001.2:621.3.081.6

E. KUŹMA

Pomiar stałej czasu termistora

Rękopis dostarczono 2. 10. 1958.

Omówiono definicję i metody pomiarowe stałej czasu termistora. Podano nowy sposób pomiaru oraz opisano układ pomiarowy wykonany w Zakładzie Elektroniki IPPT.

1. OKREŚLENIE STAŁEJ CZASU TERMISTORA

Energia dostarczona do termistora przez przepływający przezeń prąd elektryczny równa jest sumie energii zużytej na nagrzanie się termistora i energii oddanej przez termistor do otoczenia. Bilans energetyczny tego procesu określa się następującym równaniem różniczkowym

$$Ndt = HdT_x + KT_x dt, \quad (1)$$

w którym

N oznacza moc prądu elektrycznego;

t — czas,

T_x — różnicę temperatur między temperaturą termistora i otoczenia:

$$T_x = T - T_0,$$

H — pojemność cieplną termistora, określającą ilość energii, którą termistor ma do oddania otoczeniu przy różnicy temperatur

T_x równej jednostce;

K — współczynnik oddawania ciepła, określający ilość energii odprowadzonej przez termistor do otoczenia w ciągu jednostki czasu przy różnicy temperatur T_x równej jednostce.

Zależność (1) można przedstawić w postaci bilansu mocy

$$N = H \frac{dT_x}{dt} + KT_x. \quad (2)$$

W stanie ustalonym różnica temperatur termistora i otoczenia jest stała w czasie

$$\frac{dT_x}{dt} = 0 \quad (3)$$

i moc dostarczona do termistora równa jest mocy oddanej przezeń otoczeniu

$$N = KT_x = KT_{x \max} = K(T_{\max} - T_0) \quad (4)$$

Po uwzględnieniu zależności (4) równanie (2) można przedstawić w postaci

$$\frac{dT_x}{dt} = \frac{T_{x \max} - T_x}{\frac{H}{K}} \quad (5)$$

Aby obliczyć różnicę temperatur T_x w dowolnej chwili t należy scałkować równanie (5)

$$\int_0^t dt = \frac{H}{K} \int_0^{T_x} \frac{dT_x}{T_{x \max} - T_x}; \quad (6)$$

po wykonaniu działań otrzymuje się

$$T_x = T_{x \max} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (7)$$

Z (7) wynika, że przebieg $T_x = f(t)$ jest funkcją wykładniczą (rys. 1); dla $t \rightarrow \infty T_x \rightarrow T_{x \max} = \frac{N}{K}$.

Stosunek pojemności cieplnej do współczynnika oddawania ciepła nazwano stałą czasu termistora

$$\tau = \frac{H}{K} \quad (8)$$

Oznacza ona okres czasu, po którym różnica temperatur T_x wyniesie $\left(1 - \frac{1}{e}\right) T_{x \max} = 0,63 T_{x \max}$.

Przebieg wyrównywania się temperatur między termistorem i otoczeniem przy chłodzeniu jest zwierciadlanym odbiciem procesu grzania (rys. 1). Istotnie, dla warunku $N=0$ z zależności (2) otrzymuje się

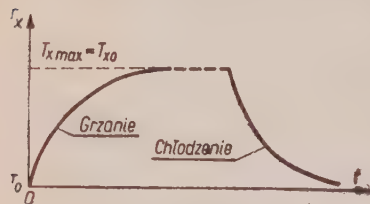
$$H \frac{dT_x}{dt} = -KT_x \quad (9)$$

i

$$T_x = T_{x0} e^{-\frac{K}{H}t} = T_{x0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10)$$

Tu τ oznacza okres czasu, po którym pierwotna różnica temperatur T_{x0} zmniejszy się $\frac{1}{e}$ krotnie (o 37%), albo, co jest jednoznaczne, po którym różnica temperatur między termistorem i otoczeniem zmniejszy się $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ krotnie (do 63% pierwotnej wartości).

Obie wartości τ (z równań 7 i 10) są identyczne przy założeniu, że tak przy grzaniu, jak przy chłodzeniu współczynnik oddawania ciepła

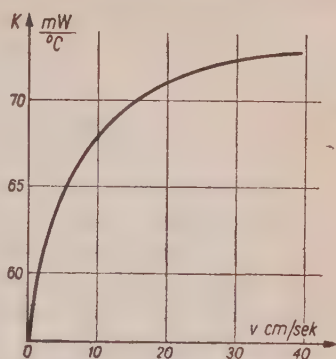


Rys. 1. Przebiegi $T_x = f(t)$.

jest wielkością stałą. W rzeczywistości K zależy w pewnym stopniu od temperatury i krzywa nagrzewania przebiega bardziej płasko, a chłodzenia — stromiej niż teoretyczne. Powoduje to, że wartości τ wyznaczone z procesów ogrzania i chłodzenia mogą się nieznacznie różnić między sobą.

Dla różnych typów termistorów wartości stałej czasu zawierają się w granicach 0,1 sek do kilku minut. Ponieważ wielkość H jest proporcjonalna do objętości termistora, K zaś — do jego powierzchni, najmniejsze τ będą posiadać te termistory, które mają największy stosunek powierzchni do objętości (np. termistory listkowe).

Wartość stałej czasu jest ściśle związana z rodzajem ośrodka, w którym znajduje się termistor (ze względu na zmianę K); inna też będzie dla ośrodka nieruchomego, a inna dla poruszającego się. W tablicy 1



Rys. 2. Zależność współczynnika strat od prędkości ośrodka (termistor ZE1, woda).

Tablica 1

Wartości współczynnika strat (w powietrzu)

Typ	Określenie	$K \left(\frac{\text{mW}}{^{\circ}\text{C}} \right)$
ZE1	plytkowy	8
ZE2	plytkowy na blaszce miedzianej	20
ZE3	perełka w bagietce szklanej	0,6
ZE5	perełka w otoczce szklanej	0,02
ZE7	perełka w próżni	0,01 ... 0,02
ZE8	próżniowy pośrednio ogrzewany	—

podano przykładowo wartości K dla różnych typów termistorów przebywających w spokojnym powietrzu. W oleju wazelinowym wartości K wzrastają 2,6-krotnie, a w wodzie 4,3-krotnie. Na rys. 2 przedstawiono zależność współczynnika strat od prędkości poruszającego się ośrodka.

2. METODY WYZNACZANIA STAŁEJ CZASU

Wyznaczenie stałej czasu na podstawie klasycznej definicji (8) jest kłopotliwe ze względu na trudności pomiaru pojemności cieplnej termistora; dlatego sposób ten jest bardzo rzadko stosowany.

Istnieje szereg pośrednich metod pomiaru τ opartych na pomiarze wielkości elektrycznych i dających wartości zbliżone do wyliczonych z zależności (8). Do najpowszechniej stosowanych należą następujące:

a. Termistor o oporności R_{25} znajdujący się w powietrzu o temperaturze 25°C , ogrzewa się do takiej temperatury t , aby jego oporność wyniosła $R_t = 0,5 R_{25}$. Za miarę τ przyjmuje się okres czasu liczony od chwili wyłączenia grzania do chwili osiągnięcia przez termistor oporności równej

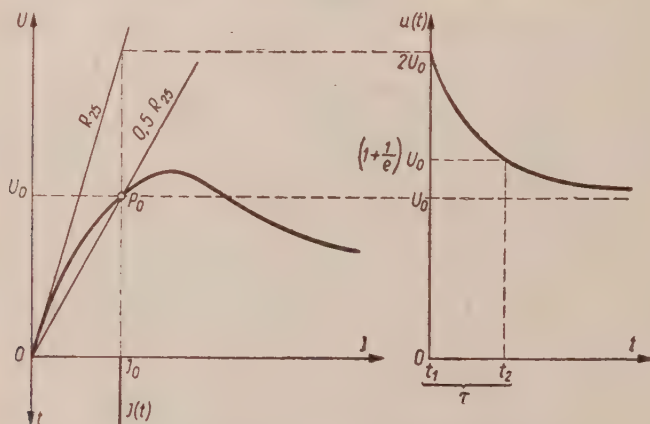
$$0,5 R_{25} + 0,5 R_{25} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0,815 R_{25}.$$

b. Termistor znajdujący się w powietrzu o temperaturze 25°C obciąża się mocą maksymalną P_m ; jako τ przyjmuje się okres czasu liczony od chwili wyłączenia obciążenia do chwili osiągnięcia przez termistor oporności równej $0,5 R_{25}$. Wartość P_m wynika z najwyższej dopuszczalnej temperatury pracy termistora.

c. Termistor znajdujący się w powietrzu o temperaturze 25°C ogrzewa się do temperatury 100°C . Za stałą czasu przyjmuje się okres czasu liczony od chwili wyłączenia grzania do chwili, w której oporność termistora wyniesie $0,5 R_{25}$.

3. PROPONOWANA METODA POMIARU STAŁEJ CZASU

Podstawowym założeniem przy opracowaniu poniższego sposobu pomiaru było to, że stała czasu charakteryzuje szybkość ustalania się przebiegów elektrycznych w termistorze będącym jednym z elementów



Rys. 3. Ustalanie się napięcia na termistorze.

danego układu elektrycznego; starano się o stworzenie warunków pomiaru najbardziej zbliżonych do występujących w czasie normalnej pracy termistora.

W metodzie tej wykorzystano przebieg ustalania się napięcia na ter-

mistorze (rys. 3). Za wielkość τ przyjęto okres czasu, liczony od chwili obciążenia termistora prądem do chwili, w której napięcie na termistorze spadnie od $2 U_1$ do wartości

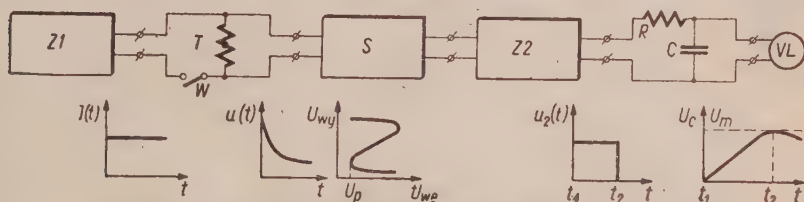
$$u(t) = \left(1 + \frac{1}{e}\right) U_0 = 1,37 U_0, \quad (11)$$

przy czym wielkość prądu obciążenia termistora I_0 dobrana jest tak, aby w stanie ustalonym oporność termistora wyniosła

$$R_0 = 0,5 R_{25}. \quad (12)$$

4. OPIS UKŁADU POMIAROWEGO

Schemat blokowy przyrządu do pomiaru stałej czasu proponowaną metodą przedstawiony jest na rys. 4. Zasilacz Z1 dostarcza do termistora



Rys. 4. Schemat blokowy urządzenia do pomiaru stałej czasu.

prąd o stałej wartości w czasie: $i(t) = I_0$. Pod wpływem przepływu prądu na termistorze powstaje impuls napięcia o kształcie przedstawionym na rys. 3. Impuls ten przychodzi na wejście układu spustowego S o regulowanym w szerokim zakresie progu zadziałania U_p , który następnie steruje zasilacz Z2. Zasilacz ten daje impuls napięcia $u_2(t)$ o kształcie zbliżonym do prostokątnego i czasie trwania $t = t_2 - t_1$, gdzie t_1 odpowiada chwili włączenia obciążenia a t_2 oznacza chwilę, w której spadek napięcia na termistorze zmaleje do wartości napięcia zadziałania U_p układu spustowego. Impuls ten przykładany jest na układ całkujący RC, na którego wyjściu tj. na pojemności C przebieg i wielkość narastającego napięcia U_c jest jednoznaczna funkcją czasu trwania tego impulsu oraz wartości elementów układu całkującego. Maksymalna wartość napięcia $U_c: U_m$ mierzona jest woltomierzem lampowym o bardzo dużej oporności wejściowej; wskaźnik woltomierza może być wyskalowany bezpośrednio w jednostkach czasu.

Szczegółowy schemat elektryczny przyrządu przedstawia rys. 5. Pomiar stałej czasu sprowadza się do następujących czynności:

a) nastawienia właściwego obciążenia termistora (przełącznik W1, potencjometry R_1, R_2, R_3),

b) nastawienie progu zadziałania układu spustowego, odpowiadającemu napięciu $U_p = 1,37 U_0 V_0$ (przełącznik W2, potencjometr R_5).

5. WYNIKI

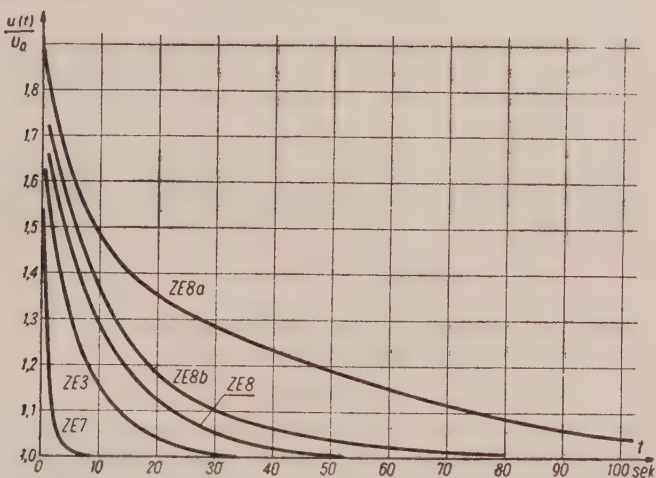
Wyniki pomiarów stałej czasu dokonywanych za pomocą opisanego urządzenia przedstawiono w tablicy 2. Są one zgodne z wynikami otrzy-

Tablica 2

Wartości stałej czasu

Typ	ZE7	ZE3	ZE9	ZE8	ZE1
$\tau(\text{sek})$	1	4	$2 \dots 4^2$	$8 \dots 20^2$	60

mywanymi przy pomiarze metodą opisaną w rozdziale 2 w punkcie a. Ze względu na dużą zależność stałej czasu od ruchu ośrodka, w którym termistor znajduje się, pomiary należy wykonywać w spokojnym powietrzu (najlepiej umieścić termistor w osłonie).



Rys. 6. Charakterystyki $\frac{u}{U_0} = f(t)$ (dla $I_0 = \text{const.}$, przy czym $I_0 = R_0 = 0,5 R_{25}$).

Na rys. 6 przedstawiono zdjęte charakterystyki dynamiczne $u = f(t)$. Widać z nich możliwość stosowania termistorów jako przekaźników czasowych regulowanych w szerokim zakresie.

WYKAZ LITERATURY

1. Björk N., Davidson R.: *Small signal behaviour of directly heated thermistors*. Acta Politechnica, Nr 169, Göteborg, 1955.
2. Kanter H.: *Temperaturabhängige Widerstände*. ATM, Nr 234, 1955.
3. Mikke K.: *Oporniki półprzewodnikowe*. Prace PIT, nr 17/18, 1956.

* W zależności od grubości izolacji perły termistorowej.

ИЗМЕРЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ ТЕРМИСТОРА

Резюме

В процессе нагревания термистора разница температур T_x между температурой термистора T и температурой окружающей среды T_0 изменяется приблизительно по уравнению

$$T_x = T_{x \max} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (7)$$

в котором T_x обозначает разницу температур в стационарном режиме, t — время, которому соответствует разность температур T_x а τ постоянная времени термистора, равная частному теплоемкости на коэффициент теплоотдачи.

$$\tau = \frac{H}{K} \text{ [sek]} \quad (8)$$

и обозначает время, после которого разность температур T_x будет равна: $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

$$T_{x \max} = 0,63 T_{x \max}.$$

Вычисление постоянной времени по классическому определению (8) затруднительно вследствие трудности измерения теплоемкости термистора, поэтому применяются различные косвенные измерительные методы, основанные на определении τ по электрическим величинам.

В предлагаемом методе измерения τ использован процесс установления постоянного напряжения на термисторе (рис. 3). Величина τ принята как период времени с момента включения нагрузки до момента падения напряжения на термисторе до величины

$$u(t) = \left(1 + \frac{1}{e}\right) U_0 = 1,37 U_0 \quad (11)$$

причем величина тока нагрузки T_0 подобрана таким образом, чтобы в стационарном режиме сопротивление термистора было равно

$$R_0 = 0,5 R_{25} \quad (12)$$

При помощи изготовленного устройства для измерения τ по предлагаемому методу можно также определять статические вольтамперные характеристики термистора $U=f(I)$, а также динамические характеристики установливания напряжения на термисторе $u=f(t)$. Результаты измерений польских термисторов даны в таблице 2 и на рис. 6.

MEASUREMENT OF THERMISTOR THERMAL TIME CONSTANT

Summary

In warming process of thermistor the temperature difference T_x between the thermistor temperature T and that of surrounding is varying approximately according to the equation

$$T_x = T_{x \max} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (7)$$

where

$T_{x \max}$ — temperature difference in steady state,
 t — time corresponding to temperature difference T_x .

$\tau = \frac{H}{K}$ [sek] — thermistor thermal time constant equal to the quotient of heat capacity and the dissipation constant. It denotes the time past which the temperature difference is equal to

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) T_{x \max} = 0,63 T_{x \max}.$$

Due to the difficulties of the heat capacity measurement of thermistor, the determining of its thermal time constant after the classical method is rather troublesome.

Therefore, various indirect measurement methods based upon the finding of τ out of the electrical magnitudes are applied.

The suggested measurement method of τ makes use of the transient voltage of the thermistor (Fig. 3). The space of time counted from the instant of the thermistor being loaded until the thermistor voltage will drop to

$$u(t) = \left(1 + \frac{1}{e}\right) U_0 = 1,37 U_0 \quad (11)$$

is taken as the value of τ . The value of the loading current I_0 is so chosen that in steady state of the thermistor resistance it is equal to

$$R_0 = 0,5 R_{\theta_5}. \quad (12)$$

With the aid of measurement arrangement made after the suggested method the static $U=f(I)$ characteristics as well as the dynamic characteristics of transient voltage of thermistor $u=f(t)$ may be determined.

The measurement records of the thermistors of Polish origin are given in Table 2 and Fig. 6.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI POLSKIEJ AKADEMII NAUK ZAKŁAD ELEKTRONIKI

Komunikaty z prac
Zakładu Elektroniki przy współpracy z Katedrą Podstaw Telekomunikacji
Politechniki Warszawskiej

669.15.198.001.2

A. SMOLIŃSKI I Z. KACZKOWSKI

WPŁYW NAPRĘŻEŃ NA PRZENIKALNOŚĆ STALI KRZEMOWYCH

Rękopis dostarczono 15. 10. 1958

Opisano wyniki badań nad wpływem naprężeń powstałych przy walcowaniu i rozciąganiu próbek na przenikalność różnych gatunków stali krzemowej w słabych polach magnetycznych. Wpływ ten zależy nie tylko od wartości tych naprężeń, lecz również od ich rodzaju.

Naprężenia wprowadzone przy walcowaniu zmniejszają przenikalność przy dużych wydłużeniach, natomiast przy małych wydłużeniach (ok. 0,15%) wywołują pewne zwiększenie przenikalności.

Naprężenia wyprowadzane przy rozciąganiu wywołują na ogół falisty przebieg przenikalności. Kształt tego przebiegu zależy wybitnie od rodzaju obróbki mechanicznej i cieplnej materiału.

ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА МАГНИТНУЮ ПРОНИЦАЕМОСТЬ КРЕМНИСТЫХ СТАЛЕЙ

Р Е З Ю М Е

Описаны результаты исследований влияния механических напряжений, возникших при прокатке и растяжении образцов, на проницаемость разных сортов кремнистой стали в слабых магнитных полях. Влияние это зависит не только от величины этих напряжений, но также и от их рода.

Напряжения, возникающие при прокатке уменьшают магнитную проницаемость при больших удлинениях, и наоборот, вызывают некоторое увеличение магнитной проницаемости при небольших удлинениях (ок. 0,15%).

Напряжения, возникающие при растяжении, вызывают в общем случае волнистую кривую изменений проницаемости. Форма этой кривой сильно зависит от рода механической и термической обработки материала.

STRESS INFLUENCE ON PERMEABILITY OF SILICON STEELS

Summary

The paper presents description of results recorded during experiments carried out to define the influence, which internal stresses originated by rolling process and stretching of the specimens exercise on the permeability of various silicon steels, within weak magnetic fields. This influence depends not only on the stress value but also on its character.

Stresses originated by rolling process if followed by considerable elongations reduce the permeability, whilst the small elongations (approxim. 0,15%) promote certain increase of permeability.

In general the stresses originated by stretching are responsible for wavy character of permeability curve. The shape of this curve depends extensively on the kind of performed machining and heat treatment of the material.

1. WSTĘP

Stal krzemowa o zawartości ok. 4% krzemu jest podstawowym materiałem na rdzenie transformatorów i dławików stosowanych w obwodach transmisyjnych. Zwykle stosuje się ten materiał w postaci blachy o grubości 0,35 mm, o przenikalności w słabych polach $\mu_{20} \geq 700$ Gs/Oe. Warunek ten spełniają w części blachy z normalnej produkcji hutniczej walcowane na gorąco, o stratności 1,3 W/kg i poniżej, odpowiednio sortowane [1] oraz blachy pochodzące z wytopów próżniowych walcowane na zimno.

Rdzenie transformatorowe składa się zazwyczaj z wykrojów wyciętych z arkuszy blach doprowadzonych w hutach do optymalnych właściwości magnetycznych. Przy wycinaniu wykrojów na ich brzegach powstają naprężenia w plastycznych śladach operacji cięcia. Naprężenia te pogarszają w zasadzie właściwości magnetyczne wykrojów i dlatego często stosuje się wyżarzanie wykrojów celem usunięcia tych naprężeń.

Jak już wspomniano, rozkład tych naprężeń w wykrojach jest nierównomierny, a ponadto typ tych naprężeń jest niejednorodny. Dlatego przy badaniu ich wpływu na właściwości magnetyczne nie można ograniczyć się tylko do jednego rodzaju naprężeń.

2. ZAKRES PRACY

W niniejszym komunikacie podano wyniki badań nad wpływem naprężeń powstałych przy walcowaniu i rozciąganiu próbek (o rozmiarach $300 \times 60 \times 35$ mm) na przenikalność μ_{20} . Pomiary wykonano w jarzmie, w które wkładano badane próbki, metodą transformatorową przy częstotliwości ok. 70 Hz [2]. Próbki badano w stanie rozsmagnesowanym i wyciętym, aby uniknąć wpływu opóźnienia magnetycznego [3].

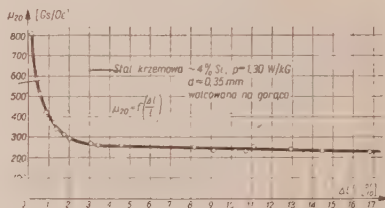
Pomiary prowadzono zasadniczo na próbkach ze stali krzemowej ok. 4% Si, gorąco walcowanej, wyciętych z arkusza

blachy. Oprócz tego badano także próbki dodatkowo żarzone w wodorze w temperaturze 1200°C. Tak wyżarzane próbki wykazały większe ziarna i w zasadzie lepsze właściwości magnetyczne, choć w pewnych przypadkach przenikalność ich była mniejsza niż przed żarzeniem [4].

Wreszcie przeprowadzono również próby na stali krzemowej o ok. 2,5% Si, zimno walcowanej, wyżarzonej w wodorze w temperaturze ok. 800°C.

3. WPŁYW NAPRĘŻEN WPROWADZONYCH PRZEZ WALCOWANIE

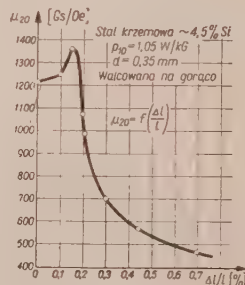
W pierwszej części pracy zbadano wpływ naprężeń wprowadzonych przez walcowanie do próbek w rozmiarach poprzednio podanych. Początkowo zba-



Rys. 1

dano zakres dużych odkształceń plastycznych sięgający do kilkunastu procent wydłużenia.

Na rys. 1 podano zależność przenikal-



Rys. 2

ności μ_{20} blach o stratności 1,3 W/kg od wydłużenia w postaci krzywej mono-

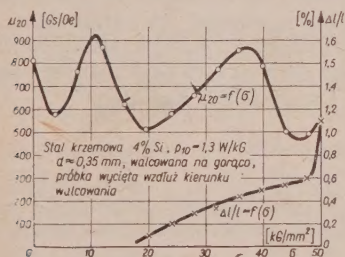
tonicznie opadającej, początkowo szybko, a potem powoli. Ustalająca się przy dużych wydłużeniach przenikalność jest prawie czterokrotnie mniejsza od wartości początkowej.

Na rys. 2 podano dodatkowo badaną zależność dla blach o strątności 1,05 W/kg w zakresie małych wydłużeń. Na tym rysunku widać niewielkie maksimum występujące przy ok. 0,15% wydłużenia.

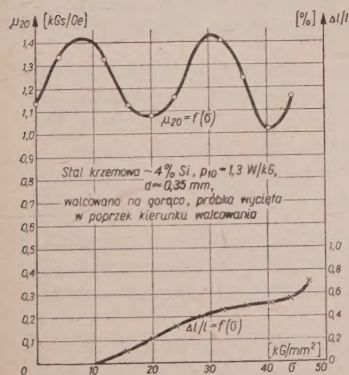
Należy dodać, że podobne zależności otrzymuje się dla blach żarzonych dodatkowo w atmosferze wodoru w temperaturze 1200°C.

4. WPŁYW NAPRĘŻEŃ WPROWADZONYCH PRZEZ ROZCIĄGANIE

W drugiej części pracy zbadano wpływ innego rodzaju naprężeń, a mianowicie



Rys. 3

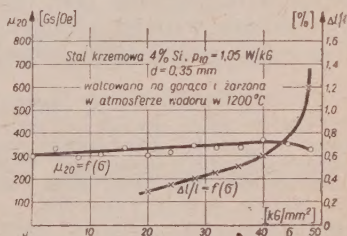


Rys. 4

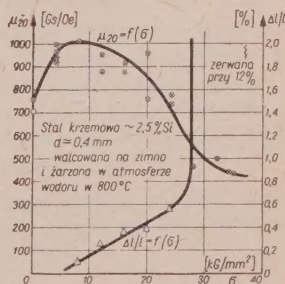
wpływ naprężeń rozciągających na przenikalność. Typowe przebiegi tych zależności podano na rys. 3 i rys. 4 dla pró-

bek wyciętych z blachy o strątności 1,3 W/kg. Krzywe podane na rys. 3 odnoszą się do próbek wyciętych wzdłuż kierunku walcowania blachy, a krzywe na rys. 4 — do próbek wyciętych w poprzek tego kierunku. Krzywe te odznaczają się falistością o dwóch maksimach; tuż przed zerwaniem występuje minimum przenikalności. Mimo że dla badanego gatunku blachy pierwsze ekstremum miało charakter minimum dla próbek wyciętych wzdłuż kierunku, walcowania, a maksimum dla próbek wyciętych w poprzek tego kierunku, to jednak jest za mało danych eksperymentalnych, aby uznać to zjawisko za ogólne dla badanych blach krzemowych.

Wpływ naprężeń rozciągających na przenikalność próbek wyciętych z blachy o strątności 1,05 W/kg żarzonej w wodorze w temperaturze 1200°C, lecz



Rys. 5



Rys. 6

o zmniejszonej przenikalności, podano na rys. 5. Z tego rysunku widać, że przenikalność ulega bardzo niewielkim zmianom w miarę rozciągania aż do żarzenia.

W końcu na rys. 6 podane są wyniki podobnych badań przeprowadzonych na stali krzemowej o ok. 2,5% Si, pochodzącej z wytopu próżniowego, zimno walcowanej i wyżarzonej w wodorze w temperaturze ok. 800°C. Z tego rysunku widać raczej tylko jedno maksimum przy małych odkształceniach plastycznych i malejące wartości przenikalności w zakresie dużych odkształceń tuż przed zerwaniem.

5. WNIOSKI

Z przeprowadzonych badań wynika, że wpływ naprężeń wprowadzonych przez odkształcenia plastyczne na przenikalność magnetyczną w słabych polach blach krzemowych zależy nie tylko od wielkości tych naprężeń, ale również i od ich rodzaju.

Naprężenia wprowadzone przy walcowaniu obniżają wartości przenikalności przy dużych wydłużeniach, natomiast

przy małych wydłużeniach ok. 0,15% wywołują pewne zwiększenie przenikalności. Tego typu zależności uzyskuje się dla blach gorąco walcowanych badanych w stanie dostarczonym przez hutę, jak również dla blach żarzonych dodatkowo w wodorze.

Naprężenia wprowadzone przy rozciąganiu wywołują niewielkie odkształcenia, niewiele przekraczające pół procent, bez zerwania, dla blach gorąco walcowanych. W tym zakresie wydłużeń przenikalność ulega okresowym zmianom. Blachy żarzone w wodorze mają prawie stałą przenikalność, niezależną od naprężeń. Natomiast blachy zimno walcowane, żarzone w wodorze w niższych temperaturach, odznaczają się jednym maksimum.

Opisane wyżej wyniki doświadczeń należałoby związać niewątpliwie z zanieczyszczeniami siatki krystalicznej i ze zmianą ich rozkładu przy różnych rodzajach i wartościach naprężeń.

WYKAZ LITERATURY

1. Smoliński A.: Uzyskiwanie rdzeni transformowanych o specjalnych własnościach ze stali krzemowej. Arch. Elektrot., Nr 3-4, Tom II, s. 205, 1953.
2. Smoliński A.: Metoda pomiaru opóźnienia przenikalności magnetycznej bezpośrednio po rozmacnesowaniu. Arch. Elektrot., Nr 2, Tom VII, s. 335, 1958.
3. Smoliński A. i Zbikowski M.: Opóźnienie magnetyczne w stalach krzemowych. Arch. Elektrot., Nr 3, Tom IV, s. 493, 1955.
4. Smoliński A. i Zawadzki S.: Uzyskiwanie rdzeni klasy C z blachy o zawartości około 4% krzemu. Publikacja wewnętrzna. Przem. Inst. Telekom., 1955.

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem, o ile możliwości, terminologii w języku rosyjskim oraz w innym języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń, jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołać na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.

U w a g a: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN. tel. 8.32.04. Redakcja czynna w poniedziałki, środy i piątki

WARUNKI PRENUMERATY

Cena w prenumeracie zł 120,— rocznie, zł 60,— półrocznie. Zamówienia i wpłaty przyjmują:

1. Przedsiębiorstwo Upowszechnienia Prasy i Książki „RUCH“, Poznań, ul. Zwierzyniecka 9, Konto PKO nr 122-6-211.831;

2. Urzędy pocztowe.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę 40% drożej. Zamówienia dla zagranicy przyjmuje Przedsiębiorstwo Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych „RUCH“, Warszawa, ul. Wilcza 46. Konto PKO nr I-6-100.024.

Bieżące numery do nabycia w niżej podanych placówkach „RUCHU“, w księgarniach naukowych „Domu Książki“ i we Wzorcowni PWN.

Informacji w sprawie sprzedaży egzemplarzy z poprzednich lat udziela Centrala Kolportażu „RUCH“, Dział Handlowy, Warszawa, ul. Srebrna 12.

PLACÓWKI „RUCHU“

Warszawa, ul. Nowopiękna 3
 Warszawa, Nowy Świat 72, Pałac Staszica
 Warszawa, ul. Wiejska 14
 Białystok, Lipowa 1
 Bielsko Biala, ul. Lenina 7, sklep nr 1
 Bydgoszcz, ul. Armii Czerwonej 2
 Bytom, Pl. Kościuszki, sklep nr 39.
 Chorzów, ul. Wolności 54
 Ciechocinek, kiosk nr 4 „Pod Grzybkiem“
 Częstochowa, II Aleja 26
 Gdańsk, ul. Długa 33/34
 Gdynia, ul. Świętojańska 9
 Gliwice, ul. Zwycięstwa 47
 Gniezno, ul. Mieczysława 31
 Grudziądz, ul. Mickiewicza, sklep nr 5
 Inowrocław, ul. Marchlewskiego 3
 Jelenią Górą, ul. 1 Maja 1
 Kalisz, ul. Śródmiejska 3
 Katowice Zach., ul. 3 Maja 28
 Kielce, ul. Sienkiewicza 22
 Koszalin, ul. Zwycięstwa 38
 Kraków, Rynek Główny 32
 Krynica, Stary Dom Zdrojowy
 Lublin, Krakowskie Przedmieście 72

Łódź, ul. Piotrkowska 200
 Nowy Sącz, ul. Jagiellońska 10
 Olsztyn, Pl. Wolności, kiosk
 Opole, Rynek, sklep nr 76
 Ostrów Wlkp., ul. Partyzancka 1
 Płock, ul. Tumską, kiosk nr 270
 Poznań, ul. Dzierżyńskiego 1
 Poznań, ul. Głogowska 66
 Poznań, ul. 27 Grudnia 4
 Przemyśl, Pl. Konstytucji 9
 Radom, ul. Moniuszki 5
 Rzeszów, ul. Kościuszki 5
 Sopot, ul. Monte Cassino 32
 Sosnowiec, ul. 22 Lipca 30
 Szczecin, Al. Piastów, róg Jagiellońskiej
 Toruń, Rynek Staromiejski 9
 Wałbrzych, ul. Wysockiego, obok pl. Grunwaldzkiego
 Włocławek, Pl. Wolności, róg ul. 3 Maja
 Wrocław, Pl. Kościuszki, kiosk nr 9
 Zabrze, Pl. 24 Stycznia, punkt nr 50
 Zakopane, ul. Krupówki 51
 Zielona Góra, Świerczewskiego 38

KSIĘGARNIE NAUKOWE „DOMU KSIĄŻKI“

Warszawa, ul. Krakowskie Przedmieście 7
 Kraków, ul. Podwale 6
 Wrocław, Rynek 60

Łódź, ul. Piotrkowska 102
 Poznań, ul. Armii Czerwonej 69

OŚRODEK ROZPOWSZECZNIANIA WYDAWNICTW NAUKOWYCH PAN

Warszawa, Pałac Kultury i Nauki (Wzorcownia)
 Wzorcownia PWN, Warszawa, ul. Miodowa 10